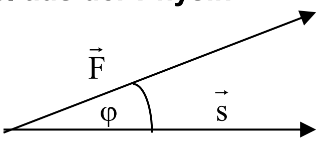
§04. Das Skalarprodukt

1. Betrag eines Vektors:

Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Maßzahl der Länge eines seiner Repräsentanten.
Schreibweise: $|\vec{a}|$ (bzw. als Verbindungsvektor der Punkte A und B: $|\overrightarrow{AB}|$)

2. Beispiel aus der Physik



W = F·s·cosφ (Arbeit = Betrag der Kraft mal Weglänge mal Kosinus des Zwischenwinkels φ)

Verknüpfung der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ führt zum Skalar (Zahl) W

3. Definition:

Die Verknüpfung der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = |a| \cdot |\vec{b}| \cdot b \cdot \cos \varphi$ (mit $0° \le \varphi \le 180°$),

die jedem Vektorpaar eine reelle Zahl zuordnet, nennt man *Skalarprodukt*.

4. Skalarprodukt in Koordinatenschreibweise:

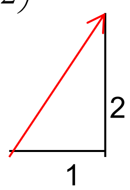
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

<u>Beispiele:</u>

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 + 5 - 3 = 12$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1^2 + 2^2 = 5$$



Es gilt für die Länge (den Betrag) eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$

Es gilt für die Länge $|\overline{AB}|$ einer Strecke $\overline{AB}$: $|\overline{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{(\vec{B} - \vec{A}) \circ (\vec{B} - \vec{A})}$

<u>Beispiel:</u> Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$ (bzw. die Entfernung der Punkte A und B):

A(1|–2|3) B(–3|0|6)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 0+2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29}$$

5. Winkel zwischen Vektoren

Formt man die Definition des Skalarprodukts um, so erhält man:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

- φ nennt man den *Zwischenwinkel der Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$.
- Ist φ = 90°, so sagt man: „Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander“ oder „$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal“
- Für zwei orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Schneiden sich 2 Geraden so nennt man den kleinsten Winkel, den sie miteinander bilden *Schnittwinkel der Geraden*.

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+4^2} \cdot \sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{3-8}{5 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{5}{5 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = 116{,}57°$$