

§05. Das Vektorprodukt

1. Berechnung des Vektorprodukts

Das Produkt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$, das 2 Vektoren einen dritten Vektor zuordnet, heißt *Vektorprodukt*.

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal (senkrecht) zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Es gilt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ (φ ist der Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$)

- Die Orientierung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ ermittelt man mit der rechten Hand:
Hand in Orientierung von $\vec{a}$, Abknicken in Orientierung von $\vec{b}$, abgespreizter Daumen gibt die Orientierung von $\vec{a} \times \vec{b}$ an.
- Zur Berechnung der Koordinaten:
4 Zahlen zusammennehmen; die Zahlen werden immer schräg (zuerst von rechts oben nach links unten multipliziert, dann von rechts oben nach links unten, dazwischen ein Minus.

Beispiel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \\ -[1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2)] \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeile abdecken, in der man arbeitet,
in der Mitte ein Minus davor

Oder mit folgendem Trick:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 0 \\ -2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 & & -1 \\ 3 & & 0 \\ & 1 & 3 \end{matrix}$

1./2. Zeile darunter,
Zeile abdecken, in der man arbeitet, stets die darunterliegenden beiden Zeilen nehmen, in der Mitte kein Minus

2. Anwendungen

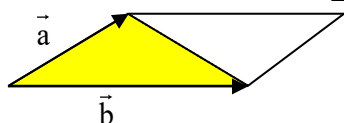
- Flächeninhalt eines Parallelogramms/Dreiecks**, das von zwei Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$ erzeugt wird:

Parallelogramm:

$$A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Dreieck (halber Flächeninhalt - gelb)

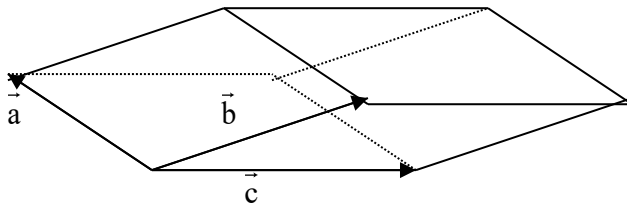
$$A_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$



- **Volumen eines Spats**, der von den Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ erzeugt wird:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

Spat besteht aus 12 Kanten, von denen jeweils 4 parallel sind;



- **Volumen eines Prismas**, das von den Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ erzeugt wird:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

Prisma ist Sonderfall eines Spats:

Es ist ein Spat mit an den Ecken aufeinander senkrecht stehenden Kanten.

- **Volumen einer vierseitigen Pyramide** (Grundfläche ist ein Rechteck):

$$V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

Das Volumen einer Pyramide ist $\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe, also $\frac{1}{3}$ mal dem Volumen eines Prismas.

- **Volumen eines Tetraeders** (dreiseitige Pyramide Grundfläche ist ein Dreieck):

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

Das Volumen eines Tetraeders ist ebenfalls das Volumen einer Pyramide, also $\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe. Da die Grundfläche (Dreieck) nur halb so groß ist wie die des Rechtecks, ergibt sich der Faktor $\frac{1}{2}$ gegenüber dem Volumen der vierseitigen Pyramide.