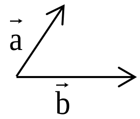
# §06. Lineare Abhängigkeit

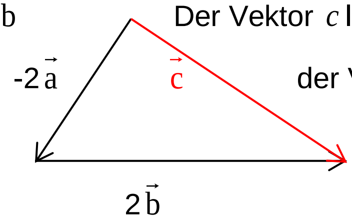
<u>Definition:</u>

Den Ausdruck $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n}$ (mit $\lambda_1; \lambda_2; ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$) nennt man *Linearkombination* der Vektoren $\overrightarrow{a_1};\ \overrightarrow{a_2}; ...; \overrightarrow{a_n}$

<u>Beispiel:</u>

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$




Der Vektor $\vec{c}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schreiben:

$\vec{c} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$

<u>Definition:</u>

Gegeben sind n Vektoren $\overrightarrow{a_1};\ \overrightarrow{a_2}; ...; \overrightarrow{a_n}$. Lässt sich mindestens einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen, so nennt man die Vektoren $\overrightarrow{a_1};\ \overrightarrow{a_2}; ...; \overrightarrow{a_n}$ *linear abhängig*, ansonsten *linear unabhängig*.

<u>Beispiele:</u>

a) 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

- Zur Überprüfung verwendet man die Beziehung $\vec{a} = \lambda \vec{b}$
  Erhält man in jeder Zeile denselben Wert, so sind die Vektoren linear abhängig, erhält man in mindestens 2 Zeilen verschiedene Werte oder in einer Zeile eine falsche Aussage (z.B. 1 = 0), so sind die Vektoren linear unabhängig.

  geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} => \lambda = -0,5 \\ => \lambda = -0,5 \\ => \lambda = -0,5 \end{matrix}$ also: $\vec{a}$ ; $\vec{b}$ lin. abhängig

  geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} => \lambda = -0,5 \\ => \quad \lambda = 1 \\ => 3 = 0 \ (f) \end{matrix}$ also: $\vec{a}$ ; $\vec{b}$ lin. unabhängig

- Zwei linear abhängige Vektoren besitzen dieselbe Richtung (sie sind *parallel* bzw. *kollinear*)

- Die Repräsentanten zweier (auch unabhängiger) Vektoren kann man immer in eine Ebene legen (die beiden Vektoren sind stets *komplanar*)

b) 3 Vektoren $\vec{a}$ , $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

- Zur Überprüfung verwendet man die Beziehung $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$
  Man erhält ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den zwei Unbekannten $\lambda$ und $\mu$. Hierzu löst man zwei Gleichungen und muss die beiden Unbekannten in die 3. Gleichung einsetzen.

① Entsteht beim Einsetzen eine wahre Aussage (z.B. 0 = 0), so lässt sich der Vektor $\vec{a}$ durch Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellen, die 3 Vektoren sind also linear abhängig.

② Entsteht beim Einsetzen eine falsche Aussage (z.B. 1 = 0), so lässt sich der Vektor $\vec{a}$ nicht durch Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellen.
Um folgern zu können, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind, müsste man noch untersuchen, ob sich $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ darstellen lässt. Bei drei Vektoren reicht es aber auch, festzustellen, dass die beiden Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind.

- geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

  Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 = \lambda + 5\mu \\ \text{(II)} & 2 = 2\lambda + 10\mu \\ \text{(III)} & 3 = 6\mu \end{array}$

  Am einfachsten sind die Gleichungen (I) und (III) zu lösen. (Hier Einsetzverfahren verwenden)
  Aus (III) folgt: $\mu = 0,5$
  $\mu$ in (I) $1 = \lambda + 2,5 \quad \Rightarrow \lambda = -1,5$
  Nun muss man in die *verbleibende* Gleichung (II) *beide* Werte einsetzen:
  $\lambda, \mu$ in (II) $2 = 2\cdot(-1,5) + 10\cdot 0,5$
  $2 = -3 + 5$
  $2 = 2$ (w)
  Damit ergibt sich: Die beiden Vektoren sind linear abhängig.

- geg.: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

  Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 = \lambda \\ \text{(II)} & 2 = 2\lambda + \mu \\ \text{(III)} & 3 = 6\mu \quad \Rightarrow \mu = 0,5 \end{array}$

  Hier stehen die Lösungen für die Parameter schon da. Also muss man nur noch in die verbleibende Gleichung (II) beide Werte einsetzen:
  $\lambda, \mu$ in (II) $2 = 2\cdot 1 + 0,5$
  $2 = 2,5$ (f) => Damit ergibt sich: $\vec{a}$ lässt sich nicht als Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.

  Die Vektoren von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind allerdings linear unabhängig, was sich aus der ersten Zeile des Gleichungssystems $\vec{b} = \lambda\vec{c}$ ergibt (1 = 0).
  Damit ergibt sich insgesamt: Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig.

Weitere Eigenschaften:

- ▶ Die Repräsentanten von drei linear abhängigen Vektoren kann man immer in eine Ebene legen (drei linear abhängige Vektoren sind stets *komplanar*)
- ▶ In der Ebene gibt es maximal 2 linear unabhängige Vektoren („2-dimensional“)
- ▶ Im Raum gibt es maximal 3 linear unabhängige Vektoren („3-dimensional“)