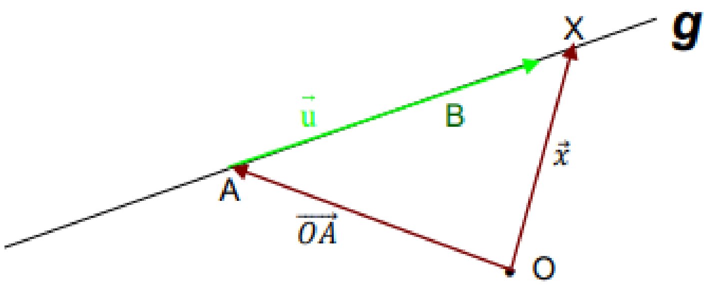
§07. Die Gerade

1. Die Parameterform



(X ist beliebiger Punkt auf g)

Um eine Gerade festzulegen, benötigt man
- den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ des Aufhängepunkts und
- einen Richtungsvektor (RV) $\vec{u}$.

Gleichung in Parameterform: g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u}$

Beispiele:

① x_1-Achse des Koordinatensystems der Ebene (2-dimensional):

Aufhängepunkt hier ist der Ursprung O(0|0)

Richtungsvektor verläuft in Richtung der x1-Achse, also z.B. $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Also: = $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

① Gerade durch die Punkte A(2|5|3) und B(0|1|3) im Koordinatensystem des Raums (3-dimensional):

Aufhängepunkt hier ist der Punkt A(2|5|3) (es kann auch B verwendet werden)

Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0-2\\1-5\\3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}$ => $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Hinweis: Bei einem RV kommt es nur auf die Richtung an, nicht auf Länge oder Orientierung. Deshalb kann man hier einen möglichst einfachen Vektor, der die vorgegebene Richtung hat, als RV verwenden. Im Beispiel wird das dadurch erreicht, dass alle Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ durch den gemeinsamen Faktor –2 dividiert werden. Damit erhält man einen anderen Vektor $\vec{u}$, der die gewünschten Eigenschaften hat.

Also: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Anmerkung: Die Gerade g kann auch als Gerade AB bezeichnet werden.

AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

2. Gegenseitige Lage zweier Geraden

Problem:

Gegeben sind die beiden Geraden g und h durch ihre Parameterform:

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u}$ (von der Gerade g ist der Aufpunkt A und der Richtungsvektor (RV) ist $\vec{u}$)

h: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v}$ (von der Gerade h ist der Aufpunkt B und der Richtungsvektor (RV) ist $\vec{v}$)

Gesucht ist nun die gegenseitige Lage der beiden Geraden.

Problem:

Um das Problem zu lösen stellt man sich zwei Fragen:

① Sind die RV der beiden Geraden linear abhängig? Ansatz: $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

JA

Das bedeutet:

Die Geraden haben dieselbe Richtung

② Liegt der Aufpunkt (z.B. A) der einen Gerade auf der anderen Gerade (z.B. auf h)?

Ansatz: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v}$

JA

Das bedeutet:

Die Geraden sind *identisch.*

g ≡ h

NEIN

Das bedeutet:

Die Geraden sind (echt) *parallel*.

g || h

NEIN

Das bedeutet:

Die Geraden haben unterschiedliche Richtungen

② Haben die Geraden einen gemeinsamen Punkt?

Ansatz: $\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v}$

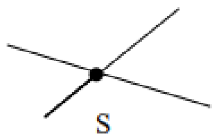
(Hier setzt man für den Vektor $\vec{x}$ der Gerade h den Term der Gerade g ein – Gleichsetzen der Geradenterme)

JA

Das bedeutet:

Die Geraden haben einen *Schnittpunkt* S.

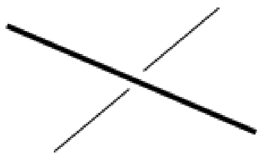
g ∩ h = {S}



NEIN

Das bedeutet:

Die Geraden sind *windschief.*



Um den Schnittpunkt zweier sich schneidender Geraden zu ermitteln, nutzt man den Ansatz : $\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{v}$, berechnet die beiden Parameter λ und μ und setzt einen von beiden in die entsprechende Gerade ein (also λ in g oder μ in h). Der entstehende Vektor $\overrightarrow{OS}$ ist der Ortsvektor des Schnittpunkts S.