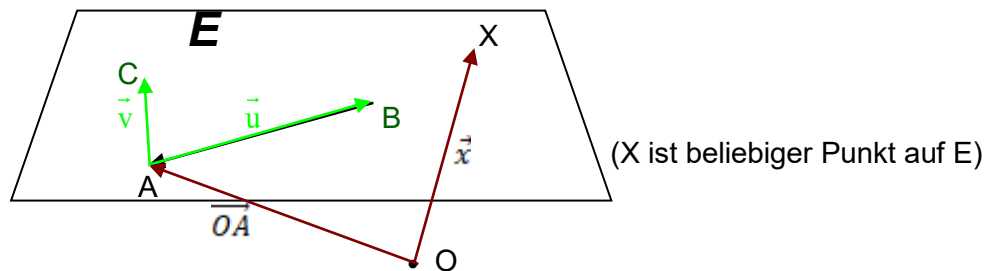


§08. Die Ebene

1. Parameterform



Um eine Ebene festzulegen, benötigt man

- den Ortsvektor \overrightarrow{OA} des Aufhängepunkts und
- zwei linear unabhängige Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v}

Gleichung in Parameterform: $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

Beispiele:

a) x_1 - x_2 -Ebene des Koordinatensystems im Raum:

Aufhängepunkt ist hier:

Richtungsvektoren: $\vec{u} =$ $\vec{v} =$

Also: E:

b) Ebene durch die Punkte A(1|2|3) und B(5|-2|-5) C(0|1|1)

Aufhängepunkt ist hier:

Richtungsvektoren: •

•

Also: E:

2. Normalenvektor

Ein Vektor \vec{n} , der auf einer Ebene senkrecht steht, heißt Normalenvektor der Ebene

Bestimmung des Normalenvektors *mit Vektorprodukt* $\vec{u} \times \vec{v}$ (vgl. §05)

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \\ -[1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2)] \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Auch bei \vec{n} kommt es nur auf die Richtung, nicht auf Länge und Orientierung an.
 Man kann also $\vec{u} \times \vec{v}$ durch eine beliebige Zahl dividieren/multiplizieren, um den Vektor \vec{n} zu erhalten.

3. Normalenform

Eine Ebene E kann (im Raum) durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0 \text{ (NF)} \quad \text{dabei ist } \vec{n} \text{ der Normalenvektor von E}$$

Benötigt wird hier

- der Ortsvektor \overrightarrow{OA} eines beliebigen Punktes A auf E (z.B. Aufhängepunkt)
- ein Normalenvektor \vec{n} von E

Jeder Gleichung ist eindeutig eine Ebene zugeordnet. Jedoch ist nicht einer Ebene eindeutig eine Gleichung zugeordnet (Normalenvektor kann in Länge und Orientierung noch variieren.)

Beispiel:

$$\text{Ebene E aus 2.} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Einsetzen in } \vec{n} \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - 8 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0 \text{ (NF)} \quad (\text{Normalenform in Koordinatendarstellung oder Koordinatenform})$$

Besondere Ebenen:

$$x_3 = 0 \quad \underline{\hspace{15cm}}$$



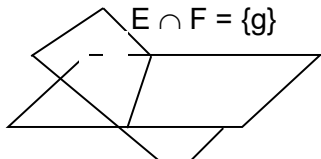



$$x_2 = 6 \quad \underline{\hspace{15cm}}$$

$$x_1 + x_3 + 5 = 0 \quad \underline{\hspace{15cm}}$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0: \quad \underline{\hspace{15cm}}$$

4. Gegenseitige Lage von 2 Ebenen E und F bzw. einer Gerade g und einer Ebene E

3 Möglichkeiten:

E und F sind identisch $E \equiv F$ 	E und F sind echt parallel $E \parallel F$ 	E und F schneiden in einer Geraden $E \cap F = \{g\}$ 
g liegt in E 	E und g sind echt parallel 	E und g schneiden sich in einem Punkt 

Merke:

Die Schnittgeraden einer Ebene E mit den Koordinatenebenen nennt man *Spurgeraden*, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen *Spurpunkte*.

a) Parameterform – Normalenform (Ebene-Ebene bzw. Gerade-Ebene):

Man setzt die Parameterform der einen Ebene (bzw. der Gerade) in die Normalenform der anderen Ebene ein und löst nach einem der Parameter auf.

Beispiel

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } F: 2x_1 - x_2 - 8 = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad E \text{ in } F: & 2 \cdot (1 + \lambda + 0\mu) - (-2 + 0\lambda + 1\mu) - 8 = 0 \\ & 2 + 2\lambda + 2 - \mu - 8 = 0 \\ & -4 + 2\lambda = \mu \end{aligned}$$

Hier 3 Möglichkeiten:

- | | |
|-------------------|---|
| 1 Ergebnis | => Ebenen E und F schneiden sich (g und E schneiden sich) |
| 2 wahre Aussage | => Ebenen sind identisch (g liegt in E) |
| 3 falsche Aussage | => Ebenen sind echt parallel (g und E sind parallel) |

Bemerkung: Bei Punkt 2 und 3 gilt bei 2 Ebenen auch, dass die Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig sind.

$$\textcircled{2} \quad \text{Einsetzen von } \mu \text{ im } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + (-4 + 2\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

③ Auflösen der Klammer und sortieren der Vektoren:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Schnittgerade } s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) 2 Ebenen in Normalenform (nur Ebene-Ebene):

Man löst das Gleichungssystem (3 Unbekannte aber nur 2 Gleichungen; 1 Variable frei wählbar z.B. falls eine Variable in beiden Gleichungen nicht vorkommt, *muss* diese frei gewählt werden)

Beispiel: E: $2x_1 - x_3 - 4 = 0$ F: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2 = 0$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & - & x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{array} \quad \text{Wähle } x_3 = \lambda$$

$$\begin{array}{rcl} \text{(I)} & 2x_1 & = 4 + \lambda \\ \text{(II)} & 2x_1 - x_2 & = 2 - 3\lambda \\ \text{(II)} - \text{(I)} & & x_2 = 2 + 4\lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Einsetzen in (II):} & 2x_1 - (2 + 4\lambda) & = 2 - 3\lambda \\ & 2x_1 - 2 - 4\lambda & = 2 - 3\lambda \\ & 2x_1 & = 4 - \lambda \\ & x_1 & = 2 - 0,5\lambda \end{array}$$

Hier 3 Möglichkeiten:

Ergebnis für x_1, x_2, x_3	=> Ebenen schneiden sich in einer Geraden
wahre Aussage	=> Ebenen sind identisch
falsche Aussage	=> Ebenen sind echt parallel

Bestimmung der Gleichung der Schnittgeraden s durch zeilenweises Einsetzen:

$$s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0,5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auf dieselbe Weise kann man auch die Koordinatenform einer Ebene in Parameterform umwandeln. Da es sich hier um 3 Variablen und eine Gleichung handelt, sind 2 Variablen frei wählbar und werden λ und μ genannt (z.B. wähle $x_1 = \lambda$; $x_3 = \mu$). Dann beide in die Ebenengleichung einsetzen, um die 3. Variable (hier: x_2) zu erhalten.

5. Die Hessesche Normalenform (HNF)

Die Normalenform einer Ebene E ist nicht eindeutig, da der Normalenvektor beliebige Orientierung sowie Länge besitzt.

Verwendet man den vom Ursprung zur Ebene zeigenden Einheitsvektor $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ von \vec{n} , so

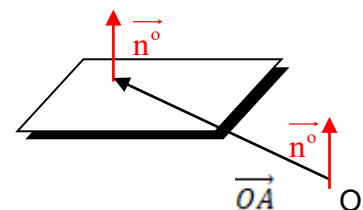
erhält man die Hesseform der Normalengleichung (HNF) (eindeutig!): $\vec{n}^0 \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

Anmerkung zur Orientierung:

Zeigt der Normalenvektor vom Ursprung zur Ebene, so liegt der Winkel φ zwischen den Vektoren \vec{OA} und \vec{n} zwischen 0° und 90° , der $\cos\varphi$ ist positiv, also auch das

Skalarprodukt $\vec{OA} \circ \vec{n} > 0$.

Da dieses Skalarprodukt die Konstante hinter dem „-“ ergibt, muss vor der Konstante ein Minus stehen.



Beispiel:

geg.: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (aus 1.)

ges.: HNF von E

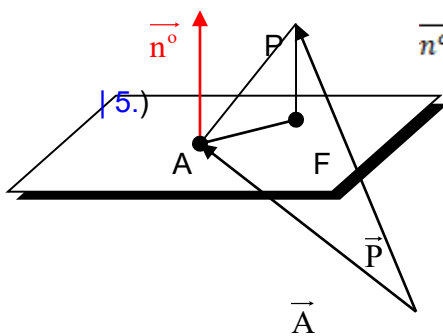
Lösung:

- Bestimme die NF von E (wie in 1.)
E: $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$ (NF)
- Bestimme $|\vec{n}|$: $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
- Teile die Koordinatenform der NF durch diesen Betrag und achte darauf, dass die Konstante ein – als Vorzeichen hat. (Gegebenenfalls mit -1 multiplizieren)

$$\frac{2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{14}} = 0 \quad (\text{HNF})$$

Anwendung:

Setzt man den Ortsvektor eines Punkts $P \in E$ in die linke Seite der HNF:



$$\vec{n}^0 \circ (\vec{OP} - \vec{OA}) = |\vec{n}^0| \cdot |\vec{OP} - \vec{OA}| \cos \phi = \quad (\text{vgl Skalarprodukt §04})$$

$$= 1 \cdot \overline{AP} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{AP}} = \overline{PF}$$

Hinweise: ① $\cos \varphi = \frac{\text{Ankath}}{\text{Hypoth}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{AP}}$

② Länge eines Einheitsvektors ist immer 1.

Satz:

Eine Ebene E sei durch ihre HNF

$$E: \vec{n}^0 \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

gegeben und ein Punkt P (mit Ortsvektor \vec{P}) außerhalb der Ebene, so gilt

$$\vec{n}^0 \circ (\vec{P} - \vec{A}) = d$$

wobei $e = |d|$ der Abstand $d(P; E)$ von P zur Ebene E ist.

Das Vorzeichen von d gibt an, ob P und der Ursprung O auf derselben Seite ($d < 0$) oder auf verschiedenen Seiten ($d > 0$) von E liegen.

Beispiel:

Bestimme den Abstand des Punktes P(1|2|3) von der Ebene E: $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$

- ① Bestimme die HNF von E (wie in 1.)

$$\frac{2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{14}} = 0 \quad (\text{HNF})$$

- ② Setze P in die linke Seite ein:

$$d(P; E) = e = \left| \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 - 8}{\sqrt{14}} \right| = \left| \frac{-9}{\sqrt{14}} \right| = \frac{9}{\sqrt{14}} \quad (P \text{ liegt auf derselben Seite von E, wie O})$$