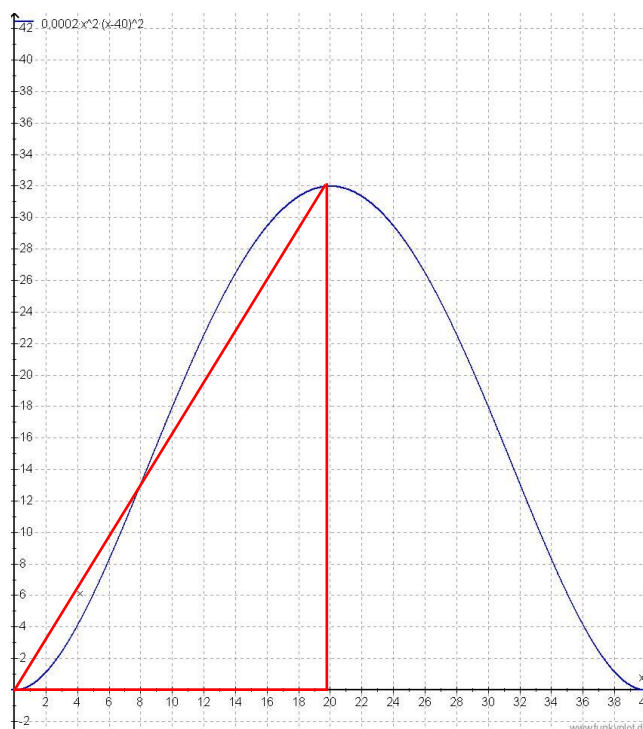


1. Aufgabe Niederschlag

Diagramm I

- a) Die Gesamtmenge entspricht der Fläche zwischen Graphen und x-Achse. Diese kann durch entweder durch Kästchenzählen ermittelt werden oder durch ein Dreieck angenähert werden. (s. Abbildung)
- Für die ersten 20 Minuten ergibt sich ein Inhalt von 80 Kästchen. Da eine Kästchenbreite aber 2 Minuten und die Kästchenhöhe 2 ml entspricht, muss man die Zahl der Kästchen mit 4 multiplizieren, um auf die Gesamtmenge zu kommen: Es ergeben sich somit 320 ml.
- Da der Graph symmetrisch ist, ergeben sich in den nächsten 20 Minuten weitere 320 ml und somit 640 ml für die ersten 40 Minuten.



- b) Zu skizzieren ist hier der Graph der Integralfunktion mit der unteren Grenze 0. (Da „nur qualitativ“, spielen die y-Werte der Integralfunktion keine Rolle)

Da für $x = 0$ sowie $x = 40$ der Graph von f den Wert 0 hat, liegen hier im Graphen der Integralfunktion waagrechte Tangenten vor. Für $x = 20$ ist die momentane Niederschlagsmenge maximal, also ist hier bei der Integralfunktion ein Wendepunkt (Punkt mit größter Steigung).

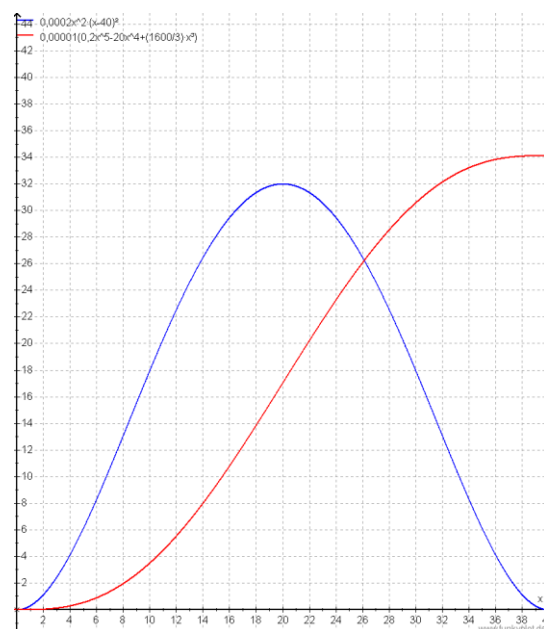
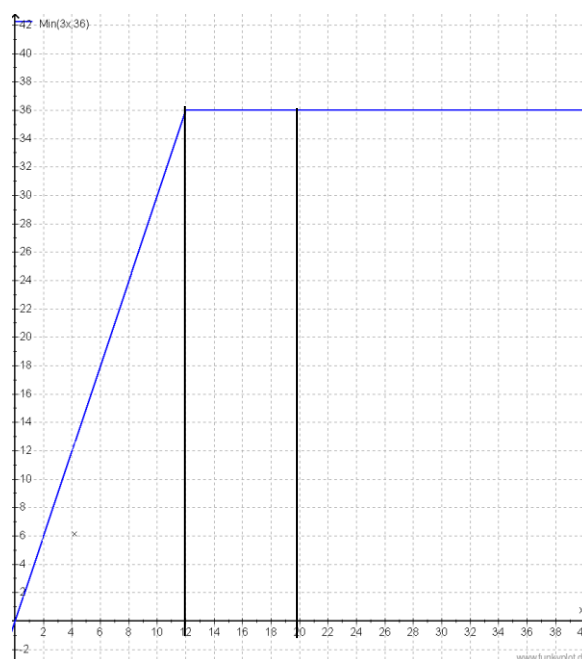


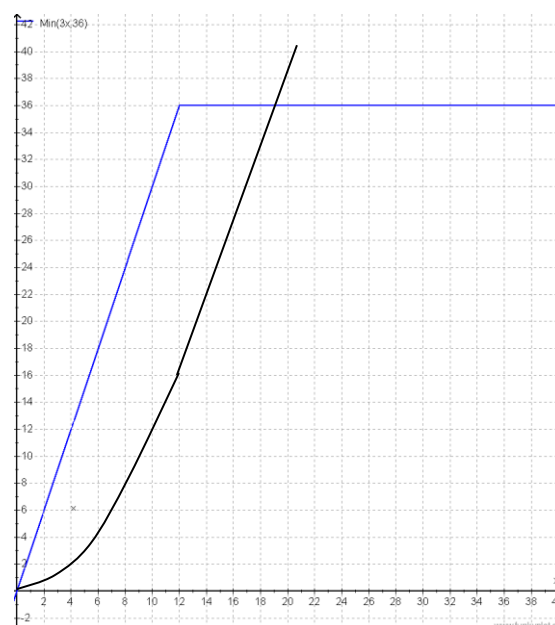
Diagramm II

- a) Die Gesamtmenge entspricht der Fläche zwischen Graphen und x-Achse. Diese kann durch entweder durch Kästchenzählen ermittelt werden oder durch Berechnung der Dreiecks- und Rechtecksfläche.
 Für das Dreieck ergibt sich ein Inhalt von $0,5 \cdot 12 \cdot 36 = 216$ (ml) oder von 54 Kästchen. Da eine Kästchenbreite aber 2 Minuten und die Kästchenhöhe 2 ml entspricht, muss man die Zahl der Kästchen mit 4 multiplizieren, um auf die Gesamtmenge zu kommen: Es ergeben sich somit ebenfalls 216 ml.
 Für das Rechteck ergeben sich $8 \cdot 36 = 288$ (ml).
 Also gilt für die Gesamtmenge:
 $216 \text{ ml} + 288 \text{ ml} = 504 \text{ ml}$



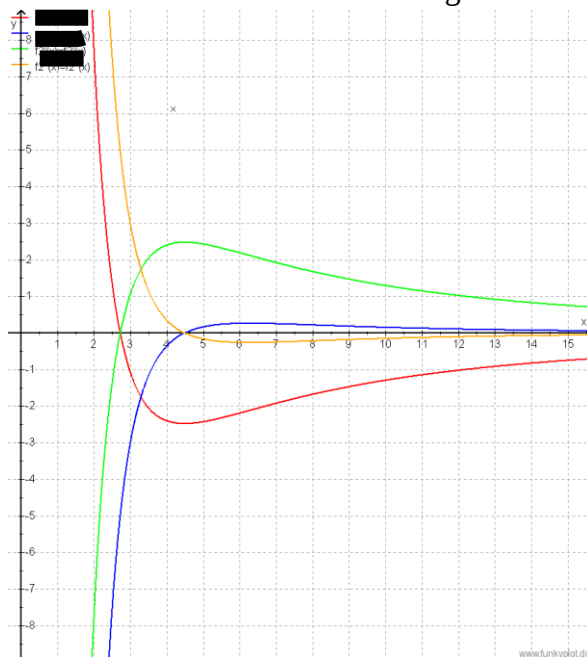
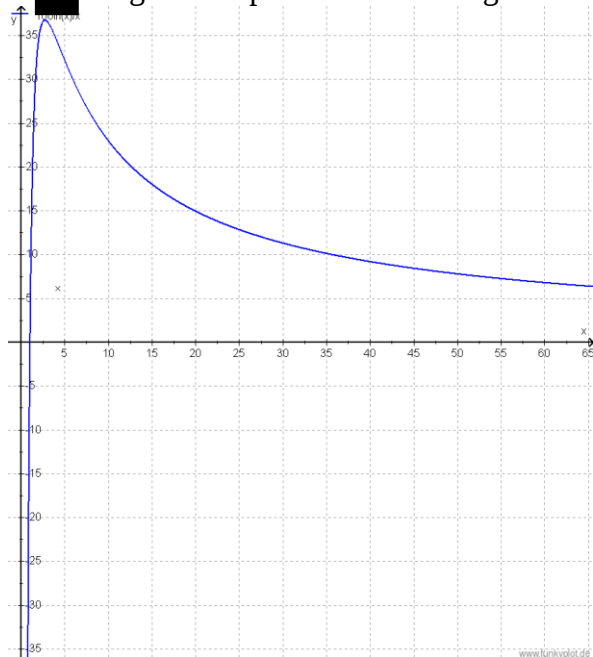
- b) Zu skizzieren ist hier der Graph der Integralfunktion mit der unteren Grenze 0. (Da „nur qualitativ“, spielen die y-Werte der Integralfunktion keine Rolle)

Da für $x = 0$ der Graph von f den Wert 0 hat, liegt hier im Graphen der Integralfunktion eine waagrechte Tangente vor. Dann steigt der Graph von f , d.h. der Graph von I wird immer steiler. Für $x \geq 12$ ist der Wert der Steigung konstant, somit ist der Graph der Integralfunktion für $x \geq 12$ eine Gerade.



2. Aufgabe Zweite Ableitung

Die linke Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f . Begründe, welcher der Graphen in der rechten Abbildung der Graph der 2. Ableitung von f ist und warum die anderen nicht in Frage kommen.



Roter Graph/grüner Graph:

Die Nullstellen der beiden Graphen befinden sich zwischen 2 und 3. Da der Graph von f aber bei 4,5 eine Wendestelle hat, müsste die zweite Ableitung dort ihre Nullstelle besitzen.

Gelber Graph

Der gelbe Graph besitzt zwar bei 4,5 eine Nullstelle, ist aber für kleinere x -Werte positiv, was eine Linkskrümmung des Graphen von f zur Folge haben würde. Dieser ist allerdings links vom Wendepunkt rechtsgekrümmt.

Blauer Graph

Der blaue Graph erfüllt die Bedingungen: Er besitzt bei 4,5 eine Nullstelle, ist für kleinere x -Werte negativ, was eine Rechtskrümmung des Graphen von f zur Folge hat und für Werte $x > 4,5$ positiv, was eine Linkskrümmung des Graphen von f zur Folge hat.

Hinweis:

Bei einem Ausschluss genügt es stets, nur eine Eigenschaft anzugeben, die der Vorgabe widerspricht (Angabe eines Gegenbeispiels zur Widerlegung einer Behauptung), während man für den Graphen, der in Frage kommt **a l l e** (hier: 3) nötigen Eigenschaften (hier: Links-/Rechtskrümmung und Wendestelle) angeben muss.

3. Aufgabe Integralfunktion

Graph I:

- a) Eine Nullstelle liegt stets an der unteren Grenze vor, da die entstehende Fläche keine Ausdehnung in x-Richtung hat und damit den Wert 0 annimmt. Also $x_1 = 2$

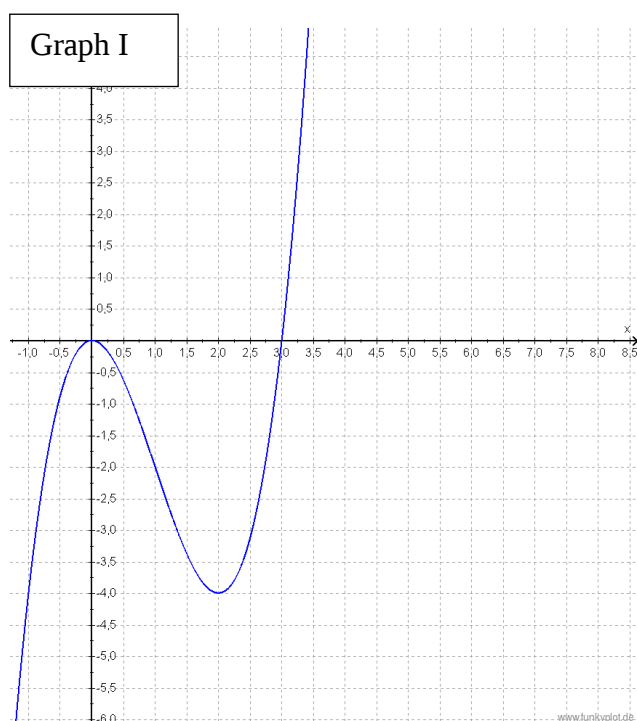
Der Flächenanteil unter der x-Achse zwischen $x = 2$ und $x = 3$ ist etwa 10 Kästchen groß. Für $x > 3$ liegen unter dem Graphen 10 Kästchen im positiven y-Bereich, wenn x etwa 3,7 ist (kann nur abgeschätzt werden.) Da sich die beiden Flächen aufheben, ist dort die 2. Nullstelle. Also $x_2 \approx 2$

Die entstehenden Flächen links von 2 liegen alle unter der x-Achse und zählen somit im Integral als positive Werte (**Integration von rechts nach links!**). Also sind keine weiteren Nullstellen ersichtlich.

- b) Extremstellen liegen bei I vor, wenn f eine Nullstelle hat. Ändert sich das Monotonieverhalten von I von abnehmend in zunehmend (d.h. bei $I' = f$ liegt ein VZW von – nach + vor), dann liegt eine Minimalstelle vor. Wenn kein VZW an der Nullstelle vorhanden ist, hat der Graph von I dort nur einen Terrassenpunkt, aber keinen Extrempunkt.

Hier liegt also bei I nur ein Minimum für $x = 3$ vor.

- c) Wendepunkte sind Punkte, bei denen die 2. Ableitung den Wert 0 und einen VZW hat, damit die 1. Ableitung ein Extremum. Da f die 1. Ableitung von I ist, müssen die Extremstellen im Graphen gesucht werden. Da dies 2 sind, hat der Graph von I zwei Wendepunkte.



Graph II:

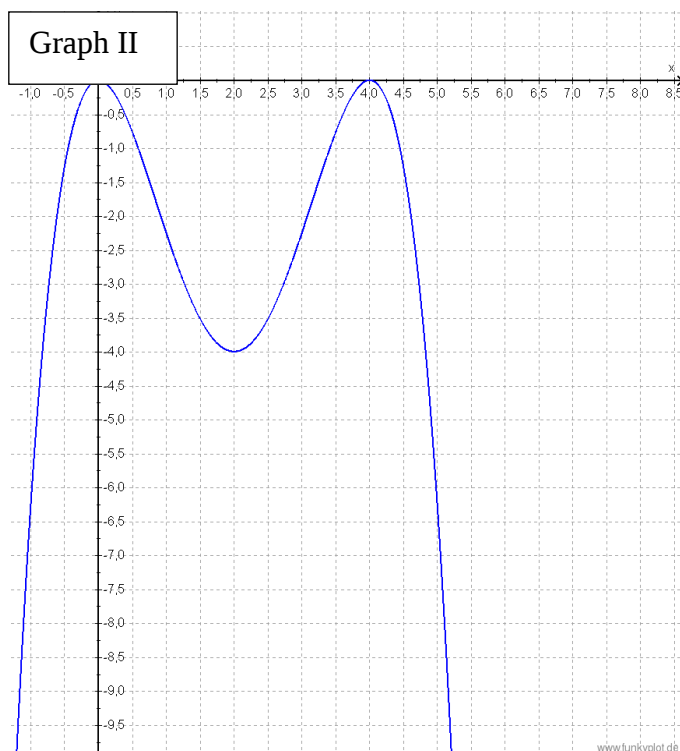
- a) Eine Nullstelle liegt stets an der unteren Grenze vor, da die entstehende Fläche keine Ausdehnung in x-Richtung hat und damit den Wert 0 annimmt. Also $x_1 = 2$

Da die Flächenanteile sich alle unter der x-Achse befinden werden sie im Integral mit immer demselben Vorzeichen verrechnet und somit sind keine weiteren Nullstellen ersichtlich.

- b) Extremstellen liegen bei I vor, wenn f eine Nullstelle hat. Ändert sich das Monotonieverhalten von I von abnehmend in zunehmend (d.h. bei $I' = f$ liegt ein VZW von $-$ nach $+$ vor), dann liegt eine Minimalstelle vor. Wenn kein VZW an der Nullstelle vorhanden ist, hat der Graph von I dort nur einen Terrassenpunkt, aber keinen Extrempunkt.

Hier liegt also bei I kein Extrempunkt vor.

- c) Wendepunkte sind Punkte, bei denen die 2. Ableitung den Wert 0 und einen VZW hat, damit die 1. Ableitung ein Extremum. Da f die 1. Ableitung von I ist, müssen die Extremstellen im Graphen gesucht werden. Da dies 3 sind, hat der Graph von I drei Wendepunkte.



4. Aufgabe Angabe und Begründung

- a) Es muss im Intervall $[2; 2]$ unter der x-Achse ein ebenso großes Flächenstück wie über der x-Achse entstehen. Dies ist z.B. bei einer Funktion, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist, der Fall. Also z.B. $f(x) = x^3$
- b) Für die Funktion f muss die 2. Ableitung genau eine Nullstelle mit VZW haben. Das ist z.B. der Fall bei $f''(x) = 6x$.
 Dieser Term lässt sich leicht integrieren, es ist aber auch jeder Term mit o.g. Eigenschaft möglich.
 Also gilt: $f'(x) = 3x^2$ und $f(x) = x^3$
- c) Damit die Integralfunktion eine zweite Nullstelle bekommt, muss die Flächenbilanz gleich Null sein. Dies passiert nur bei Funktionen deren Graphen auf verschiedenen Seiten der x-Achse liegen. Man muss also eine Funktion finden, deren Graph nur auf einer Seite der x-Achse liegt.
 z.B. $f(x) = x^2 + 1$
- d) Die untere Grenze einer Integralfunktion ist stets auch ihre Nullstelle. Aber nicht jede Stammfunktion hat eine Nullstelle,
 Beispiel: Die Funktion F mit $F(x) = x^2 + 4$ hat keine Nullstelle, ist aber Stammfunktion zu f mit $f(x) = 2x$.

5. Aufgabe Fläche

Da die Fläche durch die Schnittpunkte der Funktionsgraphen begrenzt wird, berechnet man zunächst die Schnittstellen der beiden Funktionen, indem man die Terme gleichsetzt oder die Differenz $d(x)$ der Terme („Differenzfunktion“) berechnet, diese Null setzt, und so die Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Differenzfunktion bestimmt.

Diese Differenz bestimmt die Höhe der Rechtecke der Untersumme und somit muss die Differenzfunktion integriert werden.

Da ein Integral eine Flächenbilanz ist, müssen negativ gewertete Flächenstücke positiv gezählt werden. Das Integral wechselt sein VZ, wenn die Differenzfunktion eine Nullstelle hat. Somit integriert man von Nullstelle zu Nullstelle, wobei man die Einzelintegrale in Betragstriche setzt:

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} d(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} d(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} d(x) dx \right|$$