

§10. Flächenberechnung

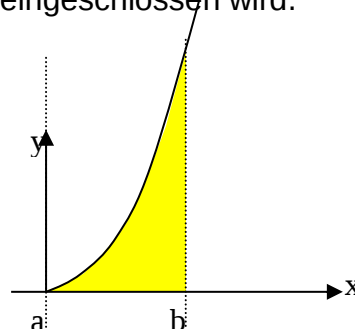
1. Streifenmethode

Problem:

Es soll der Flächeninhalt A angenähert werden, der vom Graphen einer Funktion und der x -Achse in einem bestimmten Intervall $[a; b]$ eingeschlossen wird.

Beispiel:

$$f(x) = x^2; \quad a = 0; \quad b = 2$$



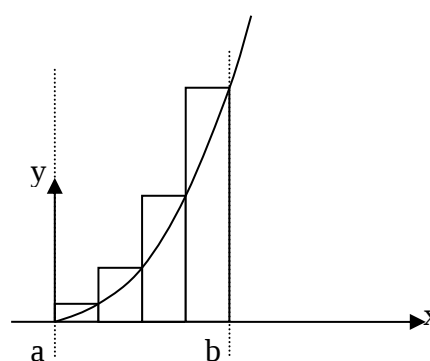
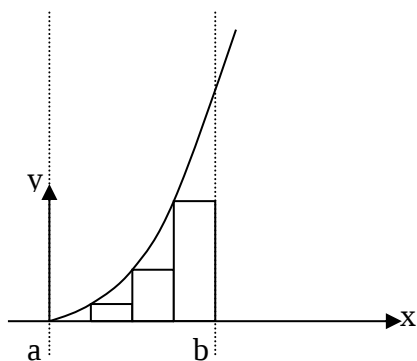
Lösung:

Das Flächenstück wird in n rechteckige Streifen mit derselben Breite Δx zerlegt, deren Flächeninhalte addiert werden. Je größer die Anzahl n der Streifen ist, desto besser wird der gesuchte Flächeninhalt angenähert.

$$n = 4$$

Streifen dem Graphen *einbeschrieben*

Streifen dem Graphen *umbeschrieben*



$$\text{Breiten der Rechtecke: } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Höhen: } & \textcircled{1} h_1 = f(0 \cdot \tfrac{1}{2}) = 0 \\ & \textcircled{2} h_2 = f(1 \cdot \tfrac{1}{2}) = 0,25 \\ & \textcircled{3} h_3 = f(2 \cdot \tfrac{1}{2}) = 1 \\ & \textcircled{4} h_4 = f(3 \cdot \tfrac{1}{2}) = 2,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fläche: } U_4 &= 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 0,25 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2,25 \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= 1,75 \end{aligned}$$

$$\text{Breiten der Rechtecke: } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Höhen: } & \textcircled{1} h_1 = f(1 \cdot \tfrac{1}{2}) = 0,25 \\ & \textcircled{2} h_2 = f(2 \cdot \tfrac{1}{2}) = 1 \\ & \textcircled{3} h_3 = f(3 \cdot \tfrac{1}{2}) = 2,25 \\ & \textcircled{4} h_4 = f(4 \cdot \tfrac{1}{2}) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fläche: } O_4 &= 0,25 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2,25 \cdot \tfrac{1}{2} + 4 \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= 3,75 \end{aligned}$$

Merke

Die auf diese Weise bestimmte Fläche U_n heißt *Untersumme* (Rechtecke sind dem Graphen einbeschrieben) und O_n heißt *Obersumme* (Rechtecke sind dem Graphen umbeschrieben).

Es gilt stets: $U_n < A < O_n$

2. Exakter Flächeninhalt

Problem:

Wie kann mit Ober- und Untersumme der exakte Flächeninhalt A berechnet werden?

Lösung anhand des Beispiels:

① Bestimmung der Obersumme O_n für beliebiges n

$$\begin{aligned}
 \text{Breite: } \Delta x &= \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \\
 O_n &= \frac{2}{n} \cdot \left[f\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right) + f\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(n \cdot \frac{2}{n}\right) \right] = \\
 &= \frac{2}{n} \cdot \left[\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(n \cdot \frac{2}{n}\right)^2 \right] = \\
 &= \frac{2}{n} \cdot \left[1^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + n^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 \right] = \\
 &= \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] = \\
 &= \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{[n(n+1)(2n+1)]}{6} = \\
 &= \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(2n^2 + n + 2n + 1)}{6} = \\
 &= \frac{8}{6} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \frac{4}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

② Berechnung des Grenzwertes für $n \rightarrow \infty$.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right] = 2 \frac{2}{3}$$

Analog:

Für die Untersumme U_n ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 U_n &= \frac{2}{n} \cdot \left[0^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + (n-1)^2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 \right] = \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] = \\
 &= \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{[(n-1) \cdot ((n-1)+1) \cdot (2(n-1)+1)]}{6} = \frac{4}{3} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Somit: } A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 2 \frac{2}{3}$$

3. Bestimmtes Integral

Satz

Die Grenzwerte von Obersumme und Untersumme stimmen überein. Ihr Betrag gibt die Maßzahl des Flächeninhaltes A an.

Definition

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n$ (bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$) heißt *bestimmtes Integral der Funktion f in den Grenzen von a bis b*.

Schreibweise: $\int_a^b f(x) dx$ „Integral von f(x)dx von a bis b“

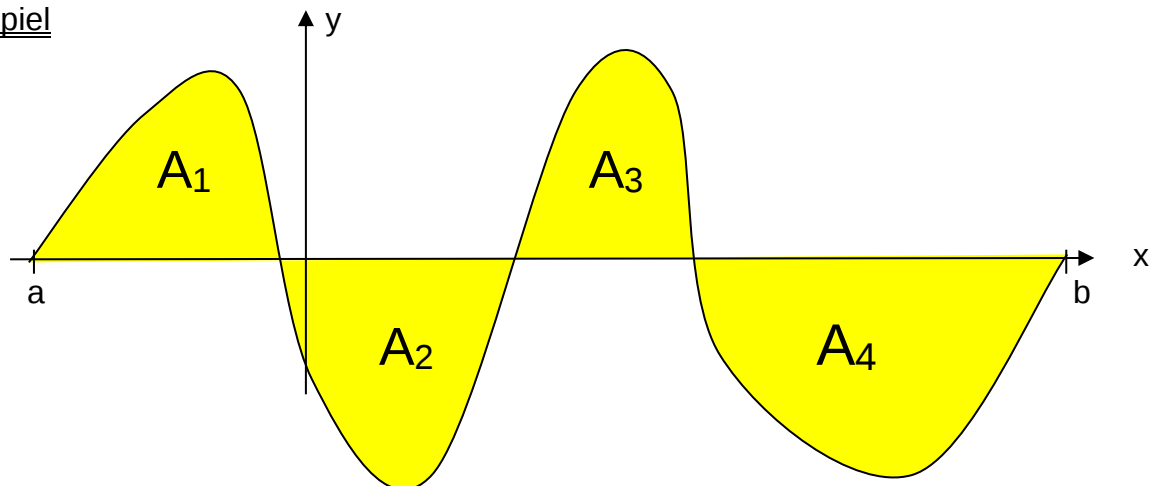
Also gilt für $f(x) = x^2$:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 dx = 2 \frac{2}{3}$$

4. Geometrische Bedeutung

Merke:

Das bestimmte Integral entspricht der Summe der „gerichteten Flächen“ zwischen Graphen und x-Achse. Bei der Integration von links nach rechts werden Flächen unterhalb der x-Achse von den Flächen oberhalb der x-Achse subtrahiert.

Beispiel

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$