

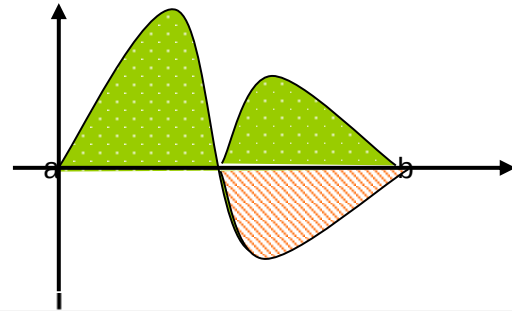
§12. Anwendungen der Integralrechnung

1. Flächenberechnung

Um den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x -Achse zu

berechnen, muss das Integral $\int_a^b |f(x)| dx$

berechnet werden.



Einfacher: „Von Nullstelle zu Nullstelle integrieren“:

① Nullstellen im Intervall $[a; b]$ berechnen ($x_1, x_2, \dots, x_n$)

② Integration: $A = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$

Beispiel:

Bestimme den Inhalt A der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2$, der x -Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

Lösung:

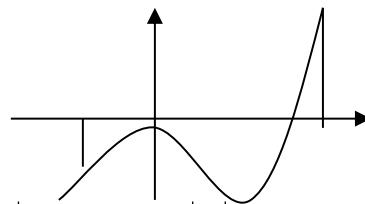
① $f(x) = 0$

$$2x^3 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(2x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

($x_2 = 2$ nicht im Intervall)

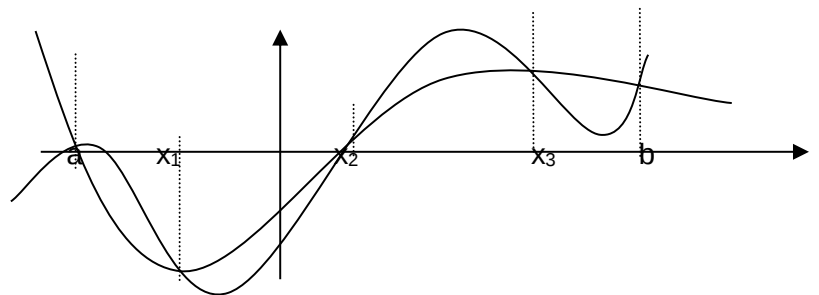


$$\textcircled{2} A = \left| \int_{-2}^0 (2x^3 - 4x^2) dx \right| + \left| \int_0^1 (2x^3 - 4x^2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} \right]_0^1 \right| =$$

$$= \left| 0 - \left(\frac{(-2)^4}{2} - \frac{4(-2)^3}{3} \right) \right| + \left| \left(\frac{1^4}{2} - \frac{4 \cdot 1^3}{3} \right) - 0 \right| = \left| -18 \frac{2}{3} \right| + \left| -\frac{5}{6} \right| = 19,5$$

2. Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen

Um die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g zu bestimmen, muss man den Betrag der Differenz der beiden Funktionen integrieren.



Also:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Beispiel:

Bestimme das von den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 + 3x + \sin x$ und $g(x) = -x^2 - 2x + \sin x$ eingeschlossene Flächenstück..

Lösung:

- ① Bestimme die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$ (evtl. größere Werte minus kleinere)

$$d(x) = -x^2 - 2x + \sin x - (x^2 + 3x + \sin x) = -2x^2 - 5x$$

- ② Bestimme die Schnittstellen der Graphen (Nullstellen von d)

$$d(x) = 0$$

$$-2x^2 - 5x = 0$$

$$x(-2x - 5) = 0$$

$$x_1 = -2,5 \quad x_2 = 0$$

- ③ Bestimme die Fläche durch Integration der Differenzfunktion

$$A = \int_{-2,5}^0 (-2x^2 - 5x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 \right]_{-2,5}^0 = 0 - \left[-\frac{2}{3}(-2,5)^3 - \frac{5}{2}(-2,5)^2 \right] = 5 \frac{5}{24}$$

3. Lokale Änderungsrate und Gesamtänderung

Ist der Verlauf der lokalen/momentanen Änderungsrate einer Größe gegeben, so kann man die Maßzahl der Gesamtänderung der Größe in einem Intervall als Maßzahl des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse deuten und so durch Integration ermitteln.

Beispiele

f beschreibt

$$\int_a^b f(x) dx \text{ beschreibt}$$

momentane Verdunstungsrate von Wasser
(z.B. in ml/h – Milliliter pro Stunde)

die im Zeitintervall [a;b] verdunstete Wassermenge
(z.B. in ml)

Besucherrate am Einlass zu einem Konzert
(z.B. in 1/min, d.h. Besucher pro min)

die im Zeitintervall [a;b] eingelassenen Besucher

Geschwindigkeit (momentane Änderungsrate des Wegs)
(z.B. in m/s)

den im Zeitintervall [a;b] zurückgelegten Weg
(z.B. in m)

Kraft, die längs eines Weges wirkt
(z.B. in N)

die auf dem Wegintervall [a;b] verrichtete Arbeit
(z.B. in Nm = J)

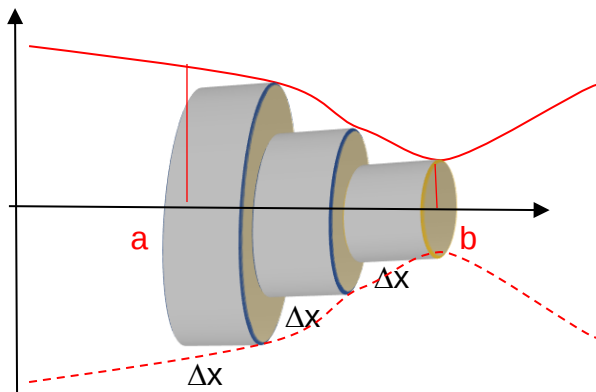
4. Uneigentliche Integrale

Entsteht bei der Integration ein ins Unendliche reichender Flächeninhalt (d.h. eine der Integrationsgrenzen strebt an den Rand des Definitionsbereichs), so berechnet man diesen über einen Grenzwert und nennt den Grenzwert *uneigentliches Integral*.

Beispiele für uneigentliche Integrale:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_z^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, D =]0; +\infty[\quad \lim_{a \rightarrow \infty} \int_3^a \left(2 - \frac{\ln(x-1)}{x}\right) dx, \quad D =]1; +\infty[$$

5. Volumenberechnung von Rotationskörpern



In den Körper werden n (Zylinder-) Scheiben einbeschrieben, deren Dicke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ist.

1. Zylinder: Grundfläche liegt bei $x_1 = a$, Deckfläche bei $x_2 = a + 1 \cdot \Delta x$
2. Zylinder: Grundfläche liegt bei $x_1 = a + 1 \cdot \Delta x$, Deckfläche bei $x_2 = a + 2 \cdot \Delta x$
3. Zylinder: Grundfläche liegt bei $x_1 = a + 2 \cdot \Delta x$, Deckfläche bei $x_2 = a + 3 \cdot \Delta x$

i-ter Zylinder: Grundfläche liegt bei $x_1 = a + (i-1) \cdot \Delta x$, Deckfläche bei $x_2 = a + i \cdot \Delta x$
 Der Radius der Zylinder ist der Funktionswert an der Deckfläche, also $r_i = f(a + i \cdot \Delta x)$

Für die Grundfläche G_i gilt also: $G_i = \pi \cdot r_i^2 = \pi \cdot [f(a + i \cdot \Delta x)]^2$

und für das Volumen V_i gilt: $V_i = G_i \cdot h = G_i \cdot \Delta x = 2\pi \cdot [f(a + i \cdot \Delta x)]^2 \cdot \Delta x$

Damit ergibt sich für das zu berechnende **Gesamtvolumen V** der Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi [f(a + i \Delta x)]^2 \Delta x = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(a + i \Delta x)]^2 \Delta x$$

Dieser Grenzwert ist ein Integral. Also gilt:

Rotiert ein Flächenstück um die x -Achse, das vom Graphen einer Funktion f und von den Geraden $x = a$ sowie $x = b$ begrenzt wird, so erhält man das Volumen des Rotationskörpers durch

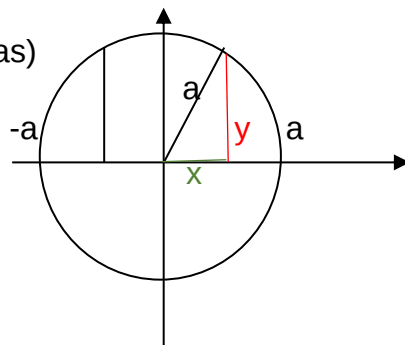
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Beispiel Halbkreis mit Mittelpunkt (0/0); Radius a – Rotationskörper ist eine Kugel

$$a^2 = y^2 + x^2 \text{ (Pythagoras)}$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$\text{also: } f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$



$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel}} &= \pi \int_{-a}^a [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}^2 dx = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \\ &= \pi \left[\left(a^2 a - \frac{a^3}{3} \right) - \left(a^2 (-a) - \frac{(-a)^3}{3} \right) \right] = \pi \left[\frac{2}{3} a^3 + \frac{2}{3} a^3 \right] = \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$