

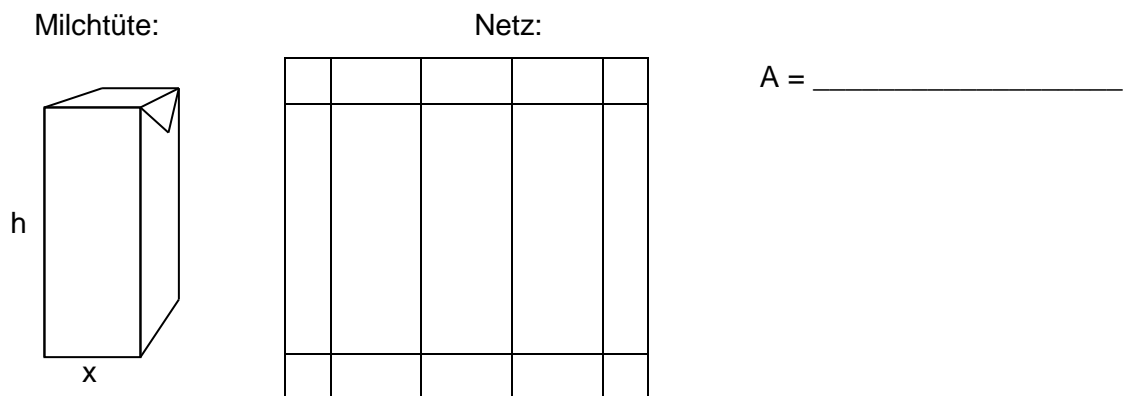
## §14. Extremwertprobleme

### 1. Beispiel

Eine quaderförmige 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche soll so hergestellt werden, dass der Materialverbrauch möglichst gering ist. Berechne die Höhe  $h_{\min}$  und die Länge  $x_{\min}$  der Grundkante dieser Milchtüte. Gib auch den zugehörigen Flächeninhalt  $A_{\min}$  der Verpackung an.

#### Flächeninhalt A des Verpackungsmaterials

Beschrifte das unten gezeichnete Netz der Milchtütenverpackung mit den Bezeichnungen für die jeweiligen Längen. Berechne dann den Flächeninhalt A der Verpackung in Abhängigkeit der Höhe h und der Länge x der Grundkante der Milchtüte.



#### Abmessungen einer realen Milchtüte

Miss die Längen auf der Innenseite der Milchtüte und berechne damit die restlichen Größen:

Grundkante:  $x =$  \_\_\_\_\_ dm

Höhe:  $h =$  \_\_\_\_\_ dm

Innenvolumen:  $V =$  \_\_\_\_\_ dm<sup>3</sup>

Flächeninhalt der Verpackung:  $A =$  \_\_\_\_\_ dm<sup>2</sup>

## 2. Lösung von Extremwertproblemen

- ① Frage Dich, welche Größe minimiert bzw. maximiert werden soll.

Hier: Flächeninhalt  $A$  der Verpackung (minimiert)

- ② Zeichne ggf. eine Skizze und gib eine Gleichung für diese Größe an. (Hier kommen noch mehrere Unbekannte vor)

Skizze: s. oben

$$A = (h + x) \cdot 4x$$

- ③ Ermittle aus der Aufgabenstellung den Zusammenhang zwischen den Unbekannten, also die Nebenbedingung(en) und löse entsprechend auf – Benennungen weglassen.

Hier: „Literpackung“ und „quadratische Grundfläche“:

$$h \cdot x^2 = 1 \text{ (dm}^3\text{)}$$

$$\text{Nebenbedingung: } h = \frac{1}{x^2}$$

- ④ Setze die Nebenbedingung(en) ein und ermittle so den Term der Zielfunktion, in dem nur noch 1 Variable vorkommt und gib eine sinnvolle Definitionsmenge an.

$$A(x) = \left( \frac{1}{x^2} + x \right) \cdot 4x$$

$$\text{Zielfunktion: } A(x) = \frac{4}{x} + 4x^2 \quad D = \mathbb{R}^+$$

- ⑤ Bestimme nun die Extrema der Zielfunktion mit Hilfe der Ableitung.

$$A(x) = \frac{4}{x} + 4x^2$$

$$A'(x) = -\frac{4}{x^2} + 8x = \frac{-4 + 8x^3}{x^2}$$

$$A'(x) = 0$$

$$-4 + 8x^3 = 0$$

$$8x^3 = 4$$

$$x = \sqrt[3]{0,5}$$

Für  $x < \sqrt[3]{0,5}$  ist  $A'(x) < 0$ ; für  $x > \sqrt[3]{0,5}$  ist  $A'(x) > 0$  (auch über VZ-Tabelle)

Also gibt es ein Minimum bei  $x = \sqrt[3]{0,5}$  mit  $A_{\min} = A(\sqrt[3]{0,5}) = \frac{4}{\sqrt[3]{0,5}} + 4(\sqrt[3]{0,5})^2 \approx 7,56 \text{ (dm}^2\text{)}$

- ⑥ Ggf. Randwertbetrachtung durchführen.

Hier wegen Monotonieverhalten nicht nötig

$$\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4}{x} + 4x^2 \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{x} + 4x^2 \right) = \infty$$