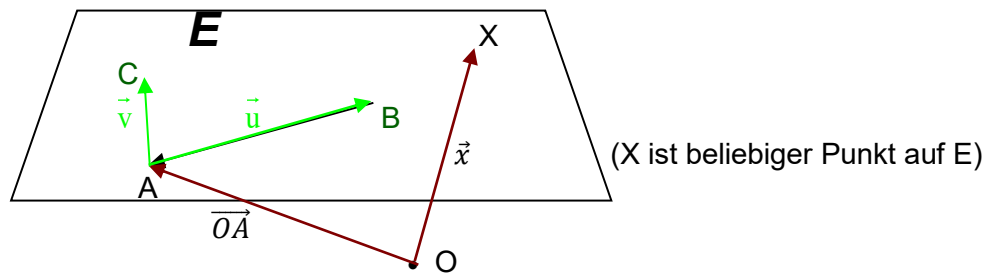


## §08. Die Ebene

### 1. Parameterform



Um eine Ebene festzulegen, benötigt man

- den Ortsvektor  $\vec{OA}$  des Aufhängepunkts und
- zwei **linear unabhängige** Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$

Gleichung in Parameterform:  $E: \vec{x} = \vec{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

Beispiele:

a)  $x_1-x_2$ -Ebene des Koordinatensystems im Raum:

Aufhängepunkt ist hier:  $O(0|0|0)$  (Ursprung des Koordinatensystems)

Richtungsvektoren:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; Vektoren in Richtung der  $x_1$ -Achse bzw.  $x_2$ -Achse

Also:  $E: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Ebene durch die Punkte  $A(1|2|3)$  und  $B(5|-2|-5)$   $C(0|1|1)$

Aufhängepunkt ist hier:  $A(1|2|3)$  (die anderen beiden B und C kämen auch in Frage)

Richtungsvektoren:  $\bullet \vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -2-2 \\ -5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\bullet \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (die beiden Vektoren sind linear

unabhängig)

Also:  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

### 2. Normalenvektor

Ein Vektor  $\vec{n}$ , der auf einer Ebene senkrecht steht, heißt Normalenvektor der Ebene

Bestimmung des Normalenvektors *mit Vektorprodukt*  $\vec{u} \times \vec{v}$  (vgl. §05)

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \\ -[1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2)] \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Auch bei  $\vec{n}$  kommt es nur auf die Richtung, nicht auf Länge und Orientierung an.  
Man kann also  $\vec{u} \times \vec{v}$  durch eine beliebige Zahl dividieren/multiplizieren, um den Vektor  $\vec{n}$  zu erhalten.

**3. Normalenform**

Eine Ebene E kann (im Raum) durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{OA}) = 0 \text{ (NF)} \quad \text{dabei ist } \vec{n} \text{ der Normalenvektor von E}$$

Benötigt wird hier

- der Ortsvektor  $\vec{OA}$  eines beliebigen Punktes A auf E (z.B. Aufhängepunkt)
- ein Normalenvektor  $\vec{n}$  von E

Jeder Gleichung ist eindeutig eine Ebene zugeordnet. Jedoch ist nicht einer Ebene eindeutig eine Gleichung zugeordnet (Normalenvektor kann in Länge und Orientierung noch variieren.)

Beispiel:

$$\text{Ebene E aus 2.} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in  $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{OA}) = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - 8 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0 \text{ (NF)} \quad (\text{Normalenform in Koordinatendarstellung oder Koordinatenform})$$

Besondere Ebenen:

$$x_3 = 0$$

$x_1x_2$ -Ebene

$$x_2 = 6:$$

Ebene parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene (im Abstand 6)

$$x_1 + x_3 + 5 = 0:$$



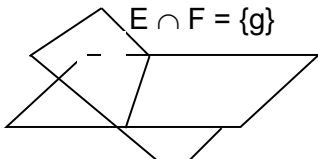

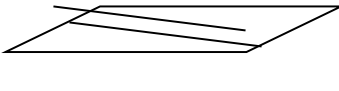
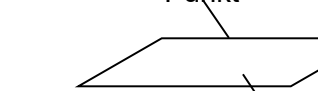
Ebene parallel zur  $x_2$ -Achse

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0:$$

Ebene enthält den Ursprung

#### 4. Gegenseitige Lage von 2 Ebenen E und F bzw. einer Gerade g und einer Ebene E

##### 3 Möglichkeiten:

E und F sind identisch $E = F$ 	E und F sind echt parallel $E \parallel F$ 	E und F schneiden in einer Geraden $E \cap F = \{g\}$ 
g liegt in E 	E und g sind echt parallel 	E und g schneiden sich in einem Punkt 

##### Merke:

Die Schnittgeraden einer Ebene E mit den Koordinatenebenen nennt man *Spurgeraden*, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen *Spurpunkte*.

##### a) Parameterform – Normalenform (Ebene-Ebene bzw. Gerade-Ebene):

Man setzt die Parameterform der einen Ebene (bzw. der Gerade) in die Normalenform der anderen Ebene ein und löst nach einem der Parameter auf.

##### Beispiel

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } F: 2x_1 - x_2 - 8 = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad E \text{ in } F: & 2 \cdot (1 + \lambda + 0\mu) - (-2 + 0\lambda + 1\mu) - 8 = 0 \\ & 2 + 2\lambda + 2 - \mu - 8 = 0 \\ & -4 + 2\lambda = \mu \end{aligned}$$

##### Hier 3 Möglichkeiten:

- |  |  |
|--|--|
| 1 Ergebnis<br>(z.B. wie oben, oder Zahlenwert für einen Parameter) | => Ebenen E und F schneiden sich<br>(g und E schneiden sich) |
| 2 wahre Aussage  | => Ebenen sind identisch<br>(g liegt in E)                   |
| 3 falsche Aussage  | => Ebenen sind echt parallel<br>(g und E sind parallel)      |

Bemerkung: Bei Punkt 2 und 3 gilt bei 2 Ebenen auch, dass die Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig sind.

$$\textcircled{2} \quad \text{Einsetzen von } \mu \text{ im E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + (-4 + 2\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

##### ③ Auflösen der Klammer und sortieren der Vektoren:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Schnittgerade } s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) 2 Ebenen in Normalenform (nur Ebene-Ebene):

Man löst das Gleichungssystem (3 Unbekannte aber nur 2 Gleichungen; 1 Variable frei wählbar z.B. falls eine Variable in beiden Gleichungen nicht vorkommt, muss diese frei gewählt werden)

Beispiel: E:  $2x_1 - x_3 - 4 = 0$       F:  $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r} 2x_1 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{array} \quad \text{Wähle } x_3 = \lambda$$

$$\begin{array}{r} \text{(I)} \quad 2x_1 = 4 + \lambda \\ \text{(II)} \quad 2x_1 - x_2 = 2 - 3\lambda \\ \text{(II)-(I)} \quad x_2 = 2 + 4\lambda \end{array}$$

Einsetzen in (II):

$$\begin{array}{r} 2x_1 - (2 + 4\lambda) = 2 - 3\lambda \\ 2x_1 - 2 - 4\lambda = 2 - 3\lambda \\ 2x_1 = 4 + \lambda \\ x_1 = 2 + 0,5\lambda \end{array}$$

Hier 3 Möglichkeiten:

Ergebnis für $x_1 \ x_2 \ x_3$	=> Ebenen schneiden sich in einer Geraden
wahre Aussage	=> Ebenen sind identisch
falsche Aussage	=> Ebenen sind echt parallel

Bestimmung der Gleichung der Schnittgeraden s durch zeilenweises Einsetzen:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auf dieselbe Weise kann man auch die Koordinatenform einer Ebene in Parameterform umwandeln. Da es sich hier um 3 Variablen und eine Gleichung handelt, sind 2 Variablen frei wählbar und werden  $\lambda$  und  $\mu$  genannt (z.B. wähle  $x_1 = \lambda$ ;  $x_3 = \mu$ ). Dann beide in die Ebenengleichung einsetzen, um die 3. Variable (hier:  $x_2$ ) zu erhalten.

**5. Die Hessesche Normalenform (HNF)**

Die Normalenform einer Ebene E ist nicht eindeutig, da der Normalenvektor beliebige Orientierung sowie Länge besitzt.

Verwendet man den vom Ursprung zur Ebene zeigenden Einheitsvektor  $\vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$  von  $\vec{n}$ , so

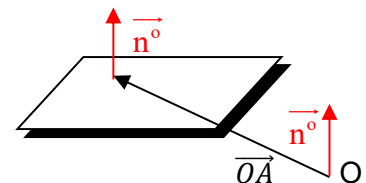
erhält man die Hesseform der Normalengleichung (HNF) (eindeutig!):  $\vec{n}^o \circ (\vec{x} - \vec{OA}) = 0$

Anmerkung zur Orientierung:

Zeigt der Normalenvektor vom Ursprung zur Ebene, so liegt der Winkel  $\varphi$  zwischen den Vektoren  $\vec{OA}$  und  $\vec{n}$

zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ , der  $\cos\varphi$  ist positiv, also auch das Skalarprodukt  $\vec{OA} \circ \vec{n} > 0$ .

Da dieses Skalarprodukt die Konstante hinter dem „-“ ergibt, muss vor der Konstante ein Minus stehen.



Beispiel:

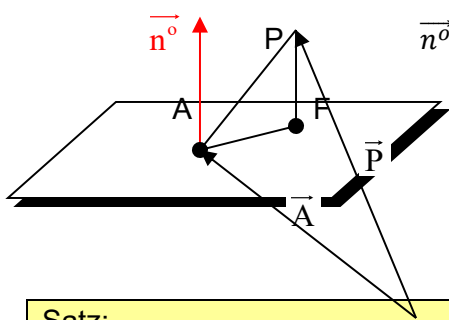
$$\text{geg.: } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (aus 1.)}$$

ges.: HNF von E

Lösung:

- Bestimme die Koordinatenform von E (wie in 1.)  
E:  $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$  (Koordinatenform)
- Bestimme  $|\vec{n}|$ :  $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
- Teile die Koordinatenform durch diesen Betrag und achte darauf, dass die Konstante ein – als Vorzeichen hat. (Gegebenenfalls mit  $-1$  multiplizieren)

$$\frac{2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{14}} = 0 \text{ (HNF)}$$

Anwendung:Setzt man den Ortsvektor eines Punkts  $P \in E$  in die linke Seite der HNF:

$$\vec{n}^o \circ (\vec{OP} - \vec{OA}) = |\vec{n}^o| \cdot \left| (\vec{OP} - \vec{OA}) \right| \cos \phi = \quad (\text{vgl Skalarprodukt §04 | 5.})$$

$$= 1 \cdot \overline{AP} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{AP}} = \overline{PF}$$

$$\text{Hinweise: } \textcircled{1} \cos \phi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$\textcircled{2}$  Länge eines Einheitsvektors ist immer 1.

Satz:

Eine Ebene E sei durch ihre HNF

$$E: \vec{n}^o \circ (\vec{x} - \vec{OA}) = 0$$

gegeben und ein Punkt P (mit Ortsvektor  $\vec{OP}$ ) außerhalb der Ebene, so gilt

$$\vec{n}^o \circ (\vec{OP} - \vec{OA}) = d$$

wobei  $e = |d|$  der Abstand  $d(P; E)$  von P zur Ebene E ist.Das Vorzeichen von d gibt an, ob P und der Ursprung O auf derselben Seite ( $d < 0$ ) oder auf verschiedenen Seiten ( $d > 0$ ) von E liegen.Beispiel:Bestimme den Abstand des Punktes P(1|2|3) von der Ebene E:  $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$  $\textcircled{1}$  Bestimme die HNF von E (wie in 1.)

$$\frac{2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{14}} = 0 \text{ (HNF)}$$

 $\textcircled{2}$  Setze P in die linke Seite ein:

$$d(P; E) = e = \left| \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 - 8}{\sqrt{14}} \right| = \left| -\frac{9}{\sqrt{14}} \right| = \frac{9}{\sqrt{14}} \quad (\text{P liegt auf derselben Seite von E, wie O})$$