§11. Die Kugel

1. Gleichung

Alle Punkte $X(x_1|x_2|x_3)$, die von einem Punkt $M(m_1|m_2|m_3)$ einen festen Abstand $r > 0$ haben, liegen auf der Kugeloberfläche (im Raum) bzw. Kreislinie (in der Ebene) um M mit Radius r.

Der Vektor $\overrightarrow{MX} = \vec{x} - \overrightarrow{OM}$ von M zu X hat die Länge (den Betrag) r: $|\vec{x} - \overrightarrow{OM}| = r$ oder besser: quadriert: $(\vec{x} - \overrightarrow{OM})^2 = r^2$

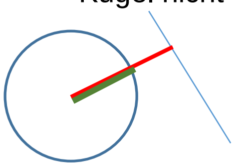
Kugel- bzw. Kreisgleichung (Mittelpunkt M, Radius r):	
$(\vec{x} - \overrightarrow{OM})^2 = r^2$	(vektorielle Form)
$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$	(Koordinatenform)

2. Lagebeziehungen

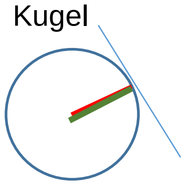
Kugel/Gerade

Abstand (Mittel-)punkt – Gerade | d: Abstand Mittelpunkt der Kugel – Gerade | r: Radius der Kugel

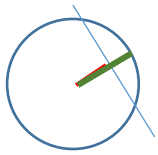
$d > r$: Gerade schneidet Kugel nicht



$d = r$: Gerade berührt die Kugel



$d < r$: Gerade schneidet Kugel in genau 2 Punkten



Schnitt- bzw. Berührpunkte erhält man durch Einsetzen der Gerade in die Kugelgleichung. (keine, eine oder zwei Lösungen)

Beispiel:

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Kugel um M(2|2|3) mit Radius $\sqrt{5}$ und der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte.

Lösung:

① Kugelgleichung

$$(\vec{x} - \overrightarrow{OM})^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{X} - \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right)^2 = \sqrt{5}^2$$

(Hier nicht gefragt: Kugel in Koordinatenform: $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 = 5$)

② Gerade $\vec{x}$ einsetzen und vereinfachen:

$$\left[\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right]^2 = \sqrt{5}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]^2 = 5$$

$4 + (\lambda - 3)^2 = 5$

$4 + \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 5$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0 \quad \lambda_1 = 4;\ \lambda_2 = 2$

Die Gerade schneidet die Kugel in 2 Punkten.

③ Schnittpunkte S_1 und S_2 berechnen (λ_1 und λ_2 in die Geradengleichung einsetzen):

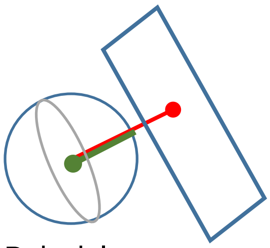
$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_1\,(4|2|4)$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_2\,(4|2|2)$$

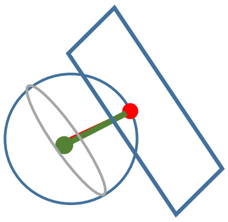
Kugel/Ebene

Abstand (Mittel-)punkt – Ebene | d: Abstand Mittelpunkt der Kugel – Ebene | r: Radius der Kugel

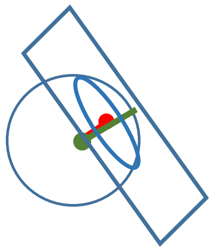
$d > r$: Ebene schneidet Kugel nicht



$d = r$: Ebene berührt die Kugel



$d < r$: Ebene schneidet Kugel in einem Schnittkreis



Beispiel:

Gegeben ist die Kugel K mit der Gleichung $(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 3)^2 + x_3^2 = 25$.

a) Gib den Mittelpunkt M_K und den Radius r_K der Kugel an.

b) Untersuche, ob die x_1-x_3-Ebene die Kugel K schneidet und bestimme ggf. Mittelpunkt M und Radius r des Schnittkreises

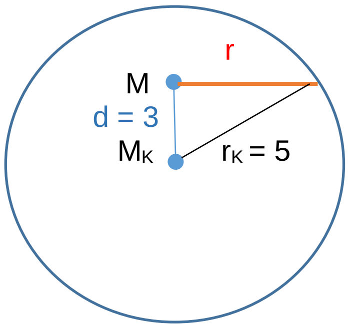
c) Eine Ebene T berührt die Kugel im Punkt B(3|2|0). Bestimme die Gleichung dieser Tangentialebene T zur Kugel K im Punkt B.

Lösung:

a) Mittelpunkt M_K (3|–3|0) und Radius $r_K = \sqrt{25} = 5$

b) Gleichung der Ebene: $x_2 = 0$

① Gegenseitige Lage (Abstand Kugelmittelpunkt-Ebene über HNF):
$x_2 = 0$ (HNF)
M einsetzen: $d = |-3| = 3 < r_K$
E und K schneiden sich also, da der Abstand d des Kugelmittelpunkts von der Ebene kleiner ist, als der Kugelradius r_K.



② Radius des Schnittkreises:
In nebenstehender Skizze erkennt man das rechtwinklige Dreieck, in dem man mit dem Satz des Pythagoras den gesuchten Radius r bestimmen kann: Der Abstand von M_K zur Ebene ist auch die Länge der Strecke $\overline{MM_K}$
$r^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow$ **r = 4**

③ Mittelpunkt des Schnittkreises:
Der Mittelpunkt liegt auf der senkrechten Verbindungsgerade von Kugelmittelpunkt zur Ebene und auf der Ebene, er ist also der Schnittpunkt der Ebene mit einer Geraden (Aufpunkt: M_K und Richtungsvektor: Normalenvektor der Ebene)

Gerade: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ in Ebene einsetzen: $-3 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 3$

μ in Gerade: g: $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ Also: **M (3|0|0)**

c) Die Tangentialebene steht senkrecht zum Verbindungsvektor der Punkte B und M_K und enthält den Punkt B als Aufpunkt:

$$\overrightarrow{BM_K} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ -3-2 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenform der Ebene:

T: $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$ => T: $-5x_2 + 10 = 0$