§12. Weitere Anwendungen

1. Geometrische Figuren in der Vektorrechnung

Parallelogramm: Gegenüberliegende Seitenvektoren haben dieselbe Richtung und denselben Betrag und die Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

Zeige:
- ▶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ▶ $\overrightarrow{AB}\ \ und\ \ \overrightarrow{AD}$ sind linear unabhängig

Rechteck: Parallelogramm, aber ein Eckwinkel ist 90° (damit sind alle 4 Winkel 90°)

Zeige:
- ▶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ▶ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$ (rechter Winkel bei A)

Quadrat: Rechteck, 2 nebeneinanderliegende Seiten (damit alle 4) gleichlang

Zeige:
- ▶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ▶ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$ (rechter Winkel bei A)
- ▶ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ (An A anliegende Seiten gleichlang)

Dreieck: Punkte liegen nicht auf einer Geraden (lineare Unabhängigkeit zweier Seitenvektoren)

Zeige:
- ▶ $\overrightarrow{AB}\ \ und\ \ \overrightarrow{AC}$sind linear unabhängig

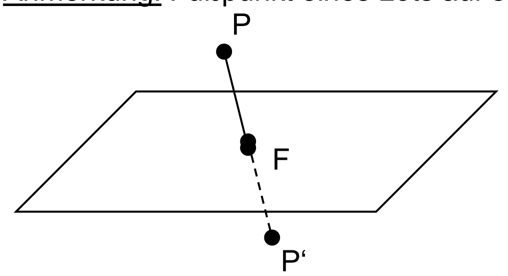
2. Lotfuß- und Spiegelpunkt

Um den *Lotfußpunkt F* eines Lots von einem Punkt auf eine Ebene zu bestimmen, verfährt man so:

① Stelle die Gleichung der Lotgerade von P auf E (Aufhängepunkt ist P und der RV ist der Normalenvektor der Ebene).

② Schneide die Gerade mit der Ebene (der gesuchte Fußpunkt ist der Schnittpunkt).

Anmerkung: Fußpunkt eines Lots auf eine Gerade: → Abstand Punkt-Gerade (vgl. §09 | 2.)



③ Der *Spiegelpunkt P‘* ergibt sich (sowohl bei Spiegelung an Gerade, als auch an Ebene aus:

$\overrightarrow{P'} = \vec{P} + 2\overrightarrow{PF}$ oder $\overrightarrow{P'} = \vec{F} + \overrightarrow{PF}$

Dazu muss immer zuerst der Fußpunkt berechnet werden!

<u>Beispiel:</u> E: $2x_1 + x_3 - 14 = 0$ P(4|2|1)

① Lotgerade: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② *l* in E einsetzen: $2(4 + 2\lambda) + (1 + \lambda) - 14 = 0$; $\lambda = 1$; F (6|2|2)

③ Spiegelpunkt: $\overrightarrow{P'} = \vec{F} + \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-4 \\ 2-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ P‘ (8|2|3)

<u>Spiegeln am Koordinatensystem</u>

Einfache Spiegelungen an den Koordinatenebenen/-achsen nimmt man durch Verändern der Vorzeichen einzelner Koordinaten („diejenigen, die fehlen“) vor:

Gegeben ist ein Punkt P(1|2|3) und ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Beide sollen gespiegelt werden.

- Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene (xy-Ebene):

  x_3 (bzw. z) fehlt → VZ der z-Koordinate ändern P‘(1|2|–3) und $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Spiegelung an der x_2-x_3-Ebene (yz-Ebene):

  x_1 (bzw. x) fehlt → VZ der x-Koordinate ändern P‘(–1|2|3) und $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Spiegelung an der x_2 -Achse (y-Achse):

  x_1 und x_3 (bzw. x, z) fehlen → VZ der x- und z-Koordinaten ändern P‘(–1|2|–3) und $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

- Spiegelung am Ursprung:

  Alle Koordinaten → VZ aller Koordinaten ändern P‘(–1|–2|–3) und $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. Vektor mit vorgegebener Richtung und Länge bestimmen

Wenn ein Vektor gegeben ist und es soll ein weiterer mit derselben Riuchtung , aber einer anderen gegebenen Länge bestimmt werden,
teilt man den geg. Vektor durch seine Länge und nimmt mit der geg. Länge mal.

<u>Beispiel:</u> Es soll ein Vektor $\vec{u}$ der Länge 12, der zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel ist, bestimmt werden:

<u>Lösung:</u> $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ => $|\vec{v}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$

$$\vec{u} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \cdot 12 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 4 = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$