

§02. Grenzwertberechnung

1. Konvergenz und Divergenz

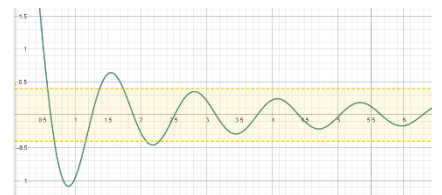
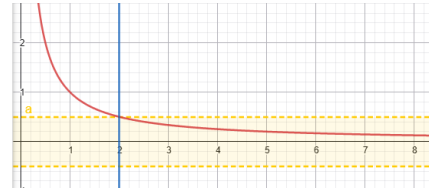
Definition:

Gegeben ist eine Funktion f mit rechtsseitig unbeschränktem Definitionsbereich*.

Wenn der Differenzbetrag $|f(x) - a|$ (Unterschied zwischen Funktionswert und der Zahl a) jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ unterschreitet, sagt man:

- f hat für $x \rightarrow +\infty$ den Grenzwert a , (der Grenzwert existiert und beträgt a), bzw.
- f konvergiert für $x \rightarrow +\infty$ gegen den Grenzwert a ,

Man schreibt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ „Limes x gegen $+\infty$ von $f(x)$ “
bzw. $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - a| = 0$



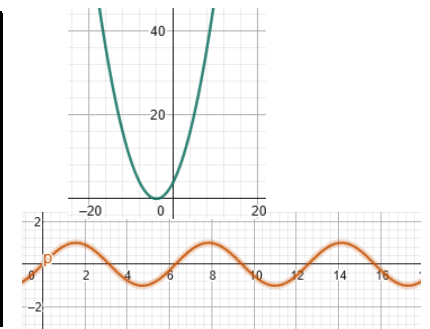
* z.B. $D = [-4; +\infty[$ oder $D = \mathbb{R}^+$

Analog definiert man $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Eine Funktion, die nicht konvergiert, nennt man divergent.

Bestimmte Divergenz: Funktionswerte werden betragsmäßig immer größer, man schreibt
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ bzw. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Unbestimmte Divergenz Man kann nicht bestimmen, ob die Werte immer größer werden
Beispiel: $f(x) = \sin x$
(schwankt zwischen -1 und 1)



Beispiel:

Gegeben ist $f: x \mapsto \frac{2}{x-26} + 4$.

a) Bestimme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Für welche (positiven) x -Werte ist der Unterschied zwischen den Funktionswerten und dem Grenzwert kleiner als 0,001?

Lösung: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ (waagrechte Asymptote einer gebrochen-rationalen Funktion)

b) $|f(x) - 4| < 0,001$

$$\left| \frac{2}{x-26} + 4 - 4 \right| < 0,001$$

$$\left| \frac{2}{x-26} \right| < 0,001$$

Da x groß ist, ist der Nenner positiv und der Bruch auch.
Also kann man die Betragsstriche weglassen.

$$\frac{2}{x-26} < 0,001 \quad | \cdot (x-26)$$

$$2 < 0,001 \cdot (x-26) \quad | : 0,001$$

$$2000 < x - 26$$

$$2026 < x$$

$$x > 2026$$

Für alle x -Werte größer als 2026 ist der Unterschied kleiner als 0,001

2. Rechenregeln

Wenn die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ existieren, dann gilt:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}, \text{ wenn } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$$

$$\textcircled{4} \text{ Aus } f(x) \rightarrow \infty \text{ f\"ur } x \rightarrow \infty \text{ folgt: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \text{ mit } n > 0 \text{ und } a \in \mathbb{R}.$$

TRICK

Zur Bestimmung von Grenzwerten kann man für x (je nach Aufgabe) $+\infty$ oder $-\infty$, d.h. eine sehr große Zahl, einsetzen und dabei folgende **verbotene Rechnungen** im Kopf ausführen:

$$\frac{a}{\infty} = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty + \infty = +\infty$$

$$a^{+\infty} = +\infty \quad (a > 1)$$

$$b^{+\infty} = 0 \quad (0 < b < 1)$$

$$a \cdot \infty = \infty \quad (a > 0)$$

$$a^{-\infty} = 0 \quad (a > 1)$$

$$b^{-\infty} = +\infty \quad (0 < b < 1)$$

$$\log_a(+\infty) = +\infty \quad (a > 0)$$

Weitere Rechnungen wie $\infty : \infty$ oder $\infty - \infty$ oder $0 \cdot \infty$ funktionieren nicht.

Beispiele:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 123 = 123$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^{-x} + 7) = 0 + 7 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x} + 3 \right) = 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12-8x}{-4x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12}{-4x} - \frac{8x}{-4x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x} + 2 \right) = 0 + 2 = 2$$

Trick bei Brüchen: Dividiere Zähler und Nenner durch die höchste im Nenner vorkommende Potenz von x:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12-8x}{-4x^2-3x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{12}{x^2} - \frac{8x}{x^2}}{\frac{-4x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{12}{x^2} - \frac{8}{x}}{-4 - \frac{3}{x}} \right) = \frac{0-0}{-4-0} = 0$$