

1. Gleichungen lösen



1. Schritt für jede Gleichung: Fasse immer erst alle Terme auf den beiden Seiten zusammen!

a) Lineare Gleichung: x kommt höchstens in 1. Potenz vor

☞ x auf der linken Seite isolieren und durch den Faktor vor dem x dividieren:

$$5x + 2 = 32 \Rightarrow x = 6$$

b) Quadratische Gleichung: x kommt höchstens in 2. Potenz vor

Grundsätzlich müssen hier alle Terme auf die linke Seite gebracht werden, rechts steht Null. Einzige Ausnahme ist der Fall a)

a) x kommt *nur* in 2. Potenz vor: ☞ x^2 auf der linken Seite isolieren, Wurzel ziehen meist 2 Lösungen!

$$2x^2 - 4 = 12 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow |x| = \sqrt{8} \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

b) x lässt sich ausklammern ☞ 2 Faktoren bilden, 2 Lösungen! (kein konstanter Summand):

$$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3$$

c) sonst: ☞ Lösungsformel, oder Vieta

$$x^2 - 4x = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = 1$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = 1$$



1. Aufgabe Löse die folgenden Gleichungen

► Zur Lösung

- a) $3x - 4x + 2 = 5x - 11$ b) $2x^2 - 3x + 5 = x^2 - 3 + 3x$ c) $x^2 - 3x + 7 = 7 - 5x$
 d) $3x - 4x + 2 = 5x^2 - 11x + 2$ e) $2x(x - 3) = 0$ f) $4x^2 - 3x - 18 - 2x = 18 - 5x$

2. Ungleichungen lösen



a) Lineare Ungleichung:

① Man löst sie wie eine Gleichung, und beachtet, dass das Ungleichheitszeichen sich umdreht, wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert. (Genauer: Wenn man eine streng abnehmende Funktion auf beiden Seiten anwendet. Dazu später)

② Die Lösungsmenge ist ein Intervall. Die Zahl ist eingeschlossen (eckige Klammer „umarmt“ die Zahl hin), wenn das Zeichen mit einem $=$ verbunden ist – also $\leq$ oder $\geq$, ansonsten ist die Zahl ausgeschlossen.

Beispiele:

$$a) -5x + 2 \geq 32 \Rightarrow -5x \geq 30 \mid :(-5) \Rightarrow x \leq -6 \Rightarrow L =]-\infty; -6]$$

6 eingeschlossen wegen $\leq$

$$b) -8x + 2 < 18 \Rightarrow -8x < 16 \mid :(-8) \Rightarrow x > -2 \Rightarrow L =]-2; +\infty[$$

-2 ausgeschlossen wegen $>$



2. Aufgabe Löse die folgenden Ungleichungen

► Zur Lösung

- a) $x - 7 > 0$ b) $3 - x < 0$ c) $7 + 2x \leq 5$ d) $5(x + 7) - 10(x + 8) > 0$



b) Nicht-Lineare Ungleichung:

- ① Stelle alle Terme auf die linke Seite, so dass auf der rechten Seite 0 steht.
- ② Faktorisierst man die linke Seite.
- ③ Ersetze gedanklich das Ungleichheitszeichen durch ein = und bestimme die Lösungen der Gleichung
- ④ Erstelle eine Vorzeichentabelle (VZT):
Über der Tabelle stehen die Lösungen der Gleichung,
links die Faktoren untereinander.
ganz unten das Vorzeichen des Produkts der Vorzeichen jeder Spalte
- ⑤ Daraus ermittelst du die Lösungsmenge.

Beispiel:

$$x^3 - 3x^2 > 2x^2 - 6x \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 5x + 6) > 0$$

$$x \cdot (x - 2) (x - 3) > 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3$$

Vorzeichentabelle:

		0	2	3
x	-	+	+	+
x - 2	-	-	+	+
x - 3	-	-	-	+
Term:	-	+	-	+

$$\Rightarrow L =]0; 2[\cup]3; +\infty[\text{ „vereinigt mit“}$$



3. Aufgabe Löse die folgenden Ungleichungen

► Zur Lösung

- a) $(4-x)(x+8) \geq 0$ b) $x^2 + 7x + 12 > 0$ c) $x^2 - 8x - 9 < 0$ d) $-2x^2 + 10x + 12 \geq 0$
 e) $x^3 + x^2 - 6x \leq 0$ f) $(x+1)(x-3) \leq 0$ g) $x^2 < 4$ h) $x^2 > 16$

3. Funktion



Definitionen:

- Eine Menge von Zahlenpaaren $(x; y)$ heißt *Funktion*,
- die Menge D_f der x-Werte *Definitionsmenge* von f, wenn jedem $x \in D_f$ genau ein y zugeordnet ist.
- Die Menge der y-Werte heißt dann *Wertemenge* W_f
- Die Menge aller Punkte $(x|f(x))$ in einem Koordinatensystem heißt *Graph* G_f

Schreibweise	Name	Beispiel
$f(x)$	Funktionsterm	$x^2 + 3x + 2$
$f: x \mapsto f(x)$	Zuordnungsvorschrift	$f: x \mapsto x^2 + 3x + 2$
$f: y = f(x)$	Funktionsgleichung	$f: y = x^2 + 3x + 2$
$f(7)$	Funktionswert an der Stelle $x = 7$	$f(7) = 49 + 21 + 2 = 72$

Beispiel: $f: x \mapsto x^2$ $D_f = \mathbb{R}$ $W_f = \mathbb{R}^+$