§01. Zufallsgrößen

1. Begriff

Definition:
Eine Funktion X, die jedem Ergebnis ω einer Ergebnismenge Ω eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt Zufallsgröße oder Zufallsvariable X auf Ω.
$X: \omega \mapsto X(\omega)$; (Definitionsmenge von X: $D_X = \Omega$)

Beispiele:

① Jemand setzt beim Roulette auf 1. Dutzend 1 Geldeinheit. Die Zufallsgröße X gebe den Reingewinn an.

$\Omega = \{0;1; 2; ...; 36\}$

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1;2;3;...;12\} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

② Folgendes Spiel beim Würfeln werde vereinbart: Einsatz: 1€. Fällt eine 6, erhält man 3€, fällt eine 4 oder 5, erhält man seinen Einsatz zurück, sonst verfällt er. Die Zufallsgröße X beschreibe den Reingewinn.

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{für } \omega = 6 \\ 0 & \text{für } \omega \in \{4; 5\} \\ -1 & \text{für } \omega \in \{1; 2; 3\} \end{cases}$$

Angabe in Form einer „Wertetabelle der Zufallsgröße“:

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	–1	–1	–1	0	0	2

2. Wahrscheinlichkeitsverteilung

Definition:
Eine Funktion P_X, die jedem Wert x_i, den eine Zufallsgröße annehmen kann, die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet, heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Zufallsgröße X auf Ω.
$P_X: x_i \mapsto P(X = x_i)$

Beispiele:

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X von Beispiel ② von oben.

x_i	–1	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Anmerkung: Axiome v. Kolmogorow erfüllt, die Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt 1.

b) Ein Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl der geworfenen 6er.

Bestimme P(Z = 0); P(Z = 1); P(Z = 2); P(Z ≤ 1); P(Z ≤ 2); P(Z > 2) P(Z ≤ 1,5) und gib die zugehörigen Ereignisse in Wortform an.

$P(Z = 0) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$ „Keine 6 fällt“

$P(Z = 1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{75}{216}$ „Genau eine 6 fällt“

$P(Z = 2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{15}{216}$ „Genau zwei 6er fallen“

$P(Z \le 1) = P(Z = 0) + P(Z = 1) = \frac{125}{216}+\frac{75}{216} = \frac{200}{216}$ „Höchstens eine 6 fällt“

$P(Z \le 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) = \frac{215}{216}$ „Höchstens zwei 6er fallen“

$P(Z > 2) = P(Z = 3) = 1 – P(Z □ 2) = 1-\frac{215}{216} = \frac{1}{216}$ „Mehr als zwei 6er fallen“

$P(Z \le 1{,}5) = P(Z \le 1) = \frac{125}{216}+\frac{75}{216} = \frac{200}{216}$ „Höchstens eine 6 fällt“

3. Verteilungsfunktion

Definition

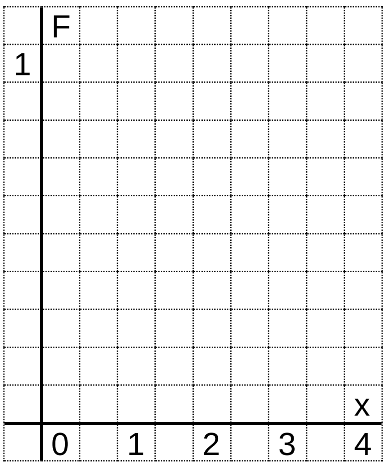
X sei eine Zufallsvariable mit der Wertemenge $\{x_1; x_2;... x_k\}$. Dann heißt die für alle x ∈ IR definierte Funktion F_X mit

$F_X : x \;a\; P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$

die *kummulative Verteilungsfuntion* der Zufallsgröße X auf Ω.

Beispiel b) von oben

x ∈	] -∞; 0[	[0; 1[	[1; 2[	[2; 3[	[3; ∞ [
F(x)	0	$\frac{125}{216} \approx 57{,}8\%$	$\frac{200}{216} \approx 92{,}6\%$	$\frac{215}{216} \approx 99{,}5\%$	1



Eigenschaften von F:

- F ist monoton zunehmend
- F ist eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion mit Sprungstellen $x_1; x_2;...; x_k$ und den Sprunghöhen $P(X = x_1); P(X = x_2)... P(X = x_k)$

- **P(X > a)** = 1 – P(X ≤ a) = **1 – F(a)**
- **P(a < X ≤ b)** = P(X ≤ b) – P(X ≤ a) = **F(b) – F(a)**
- **P(X = x_i)** = **F(x_i) – F(x_{i-1})**

4. Erwartungswert

Definition
Sei X eine Zufallsgröße, die die Werte x_1, x_2,... x_n annimmt. Der Wert
E(X) = $\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$
heißt *Erwartungswert der Zufallsgröße X*. (Manchmal wird er auch mit µ bezeichnet.)

Beispiele:
a)

x_i	1	2	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

E(X) = ____

b) *Roulette*: X beschreibe den Reingewinn beim Setzen auf „rouge“

x_i	–1	1
$P(X = x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

E(X) = ________________________________

Merke:
Ist bei einem Spiel der Erwartungswert des (Rein-)Gewinns E(X) = 0,
so heißt das Spiel *faires Spiel*.

Roulette ist also kein faires Spiel.

c) *Drothlers Würfelspiel*: Wirft der Schüler eine Primzahl, so erhält er 1 €, wirft er eine 1, so erhält er 8 €. Einsatz: 2 €. X beschreibt Reingewinn:

x_i	-2	-1	6
$P(X = x_i)$			

E(X) = _________________________________ (____________ Spiel)

5. Varianz und Standardabweichung

Folgende Verteilungen X und Y sind gegeben:

x	1	2	3	4	5
P(X = x)	0	0,1	0,8	0,1	0
P(Y = y)	0,4	0,1	0	0,1	0,4
$(x-\mu_X)$					
$(x-\mu_X)^2$					
x^2					
$(y-\mu_Y)$					
$(y-\mu_Y)^2$					
y^2					

μ_X = E(X) =________________

μ_Y = E(Y) =________________

X und Y besitzen denselben Erwartungswert, Y ist jedoch weiter gestreut als X.

Maßzahl für die Streuung:

$E((X-E(X))^2) = 0{,}2$ Werte liegen mehr am Erwartungswert

$E((Y-E(Y))^2) = 3{,}4$ Werte liegen weiter weg vom Erwartungswert

Andere Berechnungsmöglichkeit:

$E(X^2) = 0{,}4 + 7{,}2 + 1{,}6 = 9{,}2$ $E(X^2)-[E(X)]^2 = 0{,}2$

$E(Y^2) = 0{,}4 + 0{,}4 + 1{,}6 + 10 = 12{,}4$ $E(Y^2)-[E(Y)]^2 = 3{,}4$

Definition

Sei X eine Zufallsgröße auf Ω mit Erwartungswert E(X). Die Zahl
$Var(X) = E([X-E(X)]^2)$
heißt *Varianz von X* und die Zahl
$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$
heißt *Standardabweichung* oder *Streuung von X*.

Regeln:

1. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ (Verschiebungsformel)
2. $Var(a\cdot X) = a^2 Var(X)$
3. $Var(X + b) = Var(X)$

Beweis

$\mu = E(X) = \text{const}$

1. $E(X-E(X))^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu\cdot X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) = E(X^2)-[E(X)]^2$
2. $Var(aX) = E(a^2X^2) - E(aX)^2 = a^2E(X^2) - [aE(X)]^2 = a^2E(X^2) - a^2[E(X)]^2 = a^2 Var(X)$
3. $Var(X+b) = E([X+b-E(X+b)]^2) = E([X + b - b - E(X)]^2) = E([X-E(X)]^2) = Var(X)$

