

§03. Die Binomialverteilung

1. Bernoullikette

Definition:

Eine Menge von Ereignissen A_1, A_2, \dots, A_n heißt *Bernoullikette der Länge n* , wenn

1. die Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n unabhängig sind und
2. alle Ereignisse A_i die gleiche Wahrscheinlichkeit haben:

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$$

p heißt *Parameter der Bernoullikette*.

Bemerkung: Bei einer Bernoullikette gibt es nur 2 Ausgänge: *Treffer* (mit Wahrscheinlichkeit p) oder *Niete* (mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$).

Beispiele:

- ① *n-maliger Würfelwurf:*

A_i : „Keine 6 beim i -ten Wurf“

$$p = 5/6$$

- ② *Stichprobe mit Zurücklegen* (Typisches Modell für Bernoulli-Kette)

A_i : „Das i -te entnommene Stück ist Ausschuss“

p : Ausschusswahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit:

Ist die Nummer der Züge mit Treffer vorgegeben (z.B. „Nur beim 1., 3. und 5 Versuch ein Treffer“), so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{n-k}$$

Ist die Nummer der Züge mit Treffer nicht vorgegeben (z.B. „Bei genau 3 Versuchen ein Treffer“), so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiele:

- ① Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim fünfmaligen Würfeln

a) nur beim 1. und 3. Wurf eine 6 zu haben:

$$n = \underline{\quad}; k = \underline{\quad}; p = \underline{\quad} \quad P(X = 2) = \underline{\hspace{10em}}$$

nur beim 1. und 3. Wurf eine gerade Zahl zu haben.

$$n = \underline{\quad}; k = \underline{\quad}; p = \underline{\quad} \quad P(X = 2) = \underline{\hspace{10em}}$$

b) bei genau 2 Würfeln eine 6 zu haben.

- ② Bei der Produktion der Bierkrüge für das Annafest ist der Ausschussanteil 5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter 10 Krügen genau 2mal Ausschuss vorzufinden?

(Beachte: Bei großer Anzahl N (hier von produzierten Krügen) verwendet man das Modell „mit Zurücklegen“)

2. Binomialverteilung

Definition:

Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$B(n;p): k \rightarrow B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad k = 0;1;2;\dots;n$$

heißt *Binomialverteilung*.

Beispiele:

Aus einer Urne mit 3 weißen und 7 schwarzen Kugeln werden 10 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

1. Genau 3 weiße Kugeln werden gezogen:

2. keine weiße Kugel wird gezogen:

3. Höchstens 1 weiße Kugeln wird gezogen:

4. Höchstens 9 weiße Kugeln werden gezogen:

5. Mindestens 3 aber höchstens 7 weiße Kugeln werden gezogen:

—

3. Drei-Mindestens-Aufgabe:

Wie oft muss man einen Laplace-Würfel *mindestens* werfen, damit mit *mindestens* 98% Wahrscheinlichkeit *mindestens* eine 6 fällt?

Antwort:

4. Hinweise zum Umgang mit dem Tafelwerk

$P(X = k)$ „genau k Treffer“

Verwende die Spalten „ $B(n; p; k)$ “ und suche erst p , dann n und k heraus.

Schreibe: _____

Beispiel

10mal Würfeln: Wahrscheinlichkeit, genau 4 gerade Augenzahlen

$P(X \leq k)$ „höchstens k Treffer“

Verwende die Spalten „ $\sum_{i=0}^k B(n; p; i)$ “ und erst p , dann n und k heraus.

Schreibe: _____

Beispiel

10mal Würfeln: Wahrscheinlichkeit höchstens 4 gerade Augenzahlen

Sonstige

Alle anderen Wahrscheinlichkeiten müssen auf $P(X \leq k)$ zurückgeführt werden:

– „Weniger als 4“: _____

– „Mehr als 5“: _____

– „Mindestens 9“: _____

– „Mindestens 7 aber höchstens 15“: _____

– „Mehr als 7 aber höchstens 15“: _____

– „Mehr als 7 aber weniger als 15“: _____

Achtung: Nicht für alle Wahrscheinlichkeiten kann das Tafelwerk verwendet werden!!!!

5. Erwartungswert und Varianz

Wir wissen: $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$ heißt Erwartungswert der Zufallsgröße X.

$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2)$ heißt Varianz der Zufallsgröße X.

Bernoulli-Kette: Dem j-ten Bernoulli-Experiment wird die Zufallsgröße X_j zugeordnet, die die Werte 1 (Treffer) oder 0 (Niete) annehmen kann.

x_i	0	1
$P(X_j=x_i)$	q	p

Es gilt: Alle X_j sind unabhängig und

$$E(X_j) = 0q + 1p = p$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_j) &= E(X_j - p)^2 = q(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = (1 - p)p^2 + p(1 - p)^2 = \\ &= (1 - p)(p^2 + p - p^2) = (1 - p)p = qp \end{aligned}$$

Die Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ beschreibt dann die Anzahl der Treffer. Mit den Summenformeln

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = E(X_j) = np$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) = n\text{Var}(X_j) = npq$$

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit Parameter p und $q = 1 - p$ gilt:

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$