

§06. Stetige Zufallsgrößen

1. Begriff

Die bisher betrachteten Zufallsgrößen haben nur einzelne Werte (z.B. nur natürliche Zahlen) angenommen. Diese Zufallsgrößen heißen *diskrete Zufallsgrößen*.

Es gibt aber auch solche, die reellwertig sind, also jeden Wert eines bestimmten Intervalls aus $\mathbb{R}$ annehmen können (z.B. Größe eines Menschen). Diese heißen *stetige Zufallsgrößen*.

Beispiele: X beschreibt die Brenndauer einer Kerze: _____

X beschreibt die Anzahl der 6er beim 3fachen Würfeln: _____

2. Dichtefunktion

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine stetige Zufallsgröße einen Wert annimmt, beschreibt man mit einer Funktion:

Eine Funktion f heißt *Dichtefunktion über $\mathbb{R}$* , wenn sie folgende Eigenschaften hat:

① $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

- Eine reellwertige Zufallsgröße X , die auf einem Intervall I definiert ist (z.B. $I = \mathbb{R}$, $I = [a; b]$) heißt *stetig mit der Dichtefunktion f* , wenn gilt:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$$

- Die Integralfunktion

$$F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

ist die *kumulative Verteilungsfunktion* der stetigen Zufallsgröße X mit $x \in [a; b]$

Es gilt dabei für diskrete/stetige Zufallsgrößen:

Kenngröße:	diskrete Zufallsgröße	stetige Zufallsgröße
Erwartungswert:	$\mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$	$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$
Varianz:	$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$	$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$
Standardabweichung:	$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Falls X im Intervall $[a; b]$ definiert ist, sind die Grenzen der Integrale jeweils a und b .

Beispiel:

Die Zufallsgröße X hat die Dichtefunktion f mit $f(x) = 1 - ax^2$ und ist im Intervall zwischen den Nullstellen der Funktion f definiert. Bestimmen Sie a und den Erwartungswert der Zufallsgröße.

Nullstellen: $1 - ax^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{a}}$

$$\int_{-\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\sqrt{\frac{1}{a}}} f(x) dx = 1$$

(Eigenschaft ② der Dichtefunktion)

Da der Graph dieser Parabel symmetrisch ist, gilt $\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a}}} f(x) dx = 0,5$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a}}} (1 - ax^2) dx = \left[x - \frac{a}{3} x^3 \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{a}}} = \sqrt{\frac{1}{a}} - \frac{a}{3} \left(\sqrt{\frac{1}{a}} \right)^3 = \sqrt{\frac{1}{a}} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{a}} \Rightarrow a = \frac{16}{9}, \text{ Nullstellen: } \pm \frac{3}{4}$$

$$\mu = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} x \cdot f(x) dx = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} x \cdot \left(1 - \frac{9}{16} x^2 \right) dx = 0 \text{ (Graph punktsymmetrisch zum Ursprung)}$$