

## §07 Normalverteilung

### 1. Gauß'sche Glockenfunktion

Die Funktionen der Schar

$$\varphi_{\mu,\sigma}: x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ und den Parametern } \mu \text{ und } \sigma$$

heißen *Gauß'sche Glockenfunktionen*.

Mit  $\sigma = 1$  und  $\mu = 0$  ergibt sich folgende Gauß'sche Glockenfunktion:

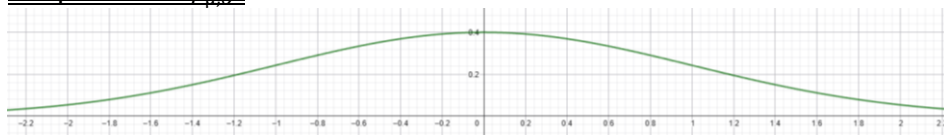
$$\varphi: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

#### Eigenschaften:

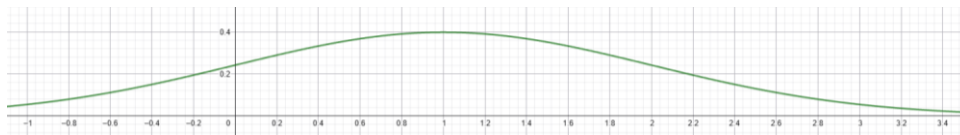
- ① Vorzeichen:  $\varphi_{\mu,\sigma}(x) > 0$
- ② Symmetrie: Der Graph von  $\varphi_{\mu,\sigma}$  ist achsensymmetrisch zur Gerade  $x = \mu$ .
- ③ Grenzwerte:  $\varphi_{\mu,\sigma}: x \mapsto \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0$
- ④ Extrempunkt: Der Punkt  $H\left(\mu \mid \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$  ist einziger Hochpunkt des Graphen von  $\varphi_{\mu,\sigma}$
- ⑤ Wendepunkte: Die beiden Wendepunkte haben die Koordinaten  $\left(\mu \pm \sigma \mid \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$
- ⑥ Integralfunktion\*: Die Integralfunktion  $\Phi_{\mu,\sigma}: x \mapsto \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu,\sigma}(t) dt$  hat folgende Eigenschaften:
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = 1$
  - Der Graph von  $\Phi_{\mu,\sigma}$  ist streng monoton zunehmend und
  - Er hat den Wendepunkt  $W(\mu \mid 0,5)$ .
  - Zu diesem Punkt ist der Graph auch punktsymmetrisch.

\* Das Integral kann nicht gelöst werden, sondern wird durch Näherungsverfahren angegeben (Taschenrechner/Tafelwerk)

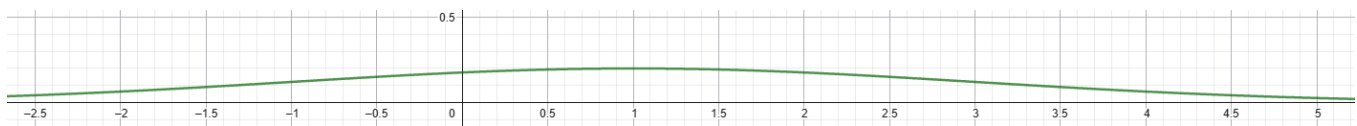
#### Graphen von $\varphi_{\mu,\sigma}$ :



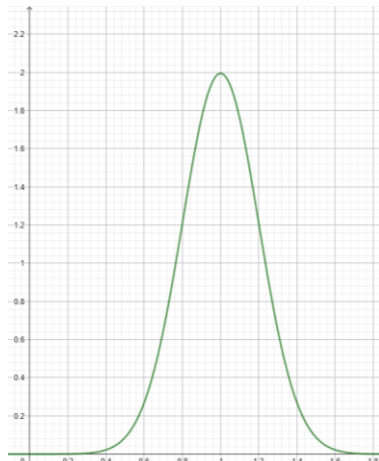
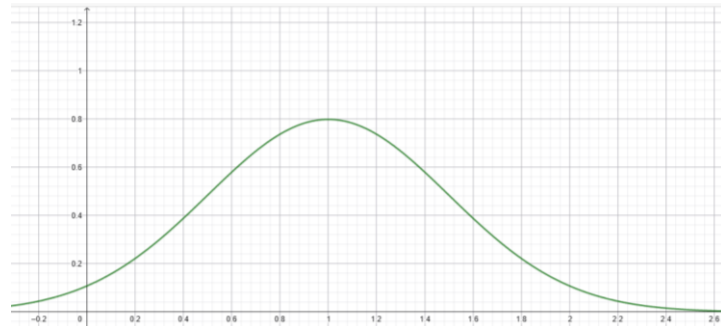
$\sigma = 1; \mu = 0;$



$\sigma = 1; \mu = 1;$



$\sigma = 2; \mu = 1;$

 $\sigma = 0,2; \mu = 1;$  $\sigma = 0,5; \mu = 1;$ 

## 2. Normalverteilung

- Eine Zufallsgröße  $X$  heißt *normalverteilt* (oder  $N_{\mu,\sigma}$ -verteilt) mit den Parametern  $\mu$  (Erwartungswert) und  $\sigma$  (Standardabweichung), wenn ihre Dichtefunktion eine Gauß'sche Glockenfunktion  $\varphi_{\mu,\sigma}$  ist.
- Die Integralfunktion  

$$\Phi_{\mu,\sigma}: x \mapsto \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu,\sigma}(t) dt = P(X \leq x)$$
 ist dabei die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße  $X$ .
- Eine Zufallsgröße  $X$  heißt *standardnormalverteilt*, wenn dabei gilt:  $\sigma = 1$  und  $\mu = 0$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $X$  Werte aus dem Intervall  $[r; s]$  annimmt, berechnet man also so:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = \Phi_{\mu,\sigma}(s) - \Phi_{\mu,\sigma}(r),$$

wobei die Werte  $\Phi_{\mu,\sigma}(s)$  und  $\Phi_{\mu,\sigma}(r)$  aus der Tabelle abgelesen oder der Integralwert mit dem Taschenrechner ermittelt werden kann.

### Hilfen für den Taschenrechner:

(Dabei muss man sich daran erinnern, dass stets gilt:  $P(X \leq \mu) = \Phi_{\mu,\sigma}(\mu) = 0,5$  )

- Falls  $a > \mu$ , gilt:  $P(X \leq a) = P(X \leq \mu) + P(\mu \leq X \leq a) = 0,5 + P(\mu \leq X \leq a)$
- Falls  $a < \mu$ , gilt:  $P(X \leq a) = P(X \leq \mu) - P(a \leq X \leq \mu) = 0,5 - P(a \leq X \leq \mu)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$
- $P(X = a) = 0$
- $P(X < a) = P(X \leq a)$

### 3. Die Sigma-Regeln

#### Vermutung:

Berechnet man bei einer  $N_{200,20}$ -verteilten Zufallsgröße die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  vom Erwartungswert höchstens  $\sigma$  abweicht, also  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ , bzw. in anderer Schreibweise:  $P(|X - \mu| \leq \sigma)$ , so erhält man:

$$P(180 \leq X \leq 220) = P(|X - 200| \leq 20) = 0,683$$

Halbiert man  $\sigma$  (also  $\sigma = 10$ ), ergibt sich ebenfalls

$$P(190 \leq X \leq 210) = P(|X - 200| \leq 10) = 0,683$$

Dies legt den Schluss nahe, dass unabhängig von  $\mu$  und  $\sigma$  gilt:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(|X - \mu| \leq \sigma) = 0,683$$

#### Beweis:

Die Wahrscheinlichkeit  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$  entspricht dem Inhalt der Fläche zwischen x-Achse und Graph der Dichtefunktion  $\varphi_{\mu,\sigma}$ .

#### a) Unabhängigkeit von $\mu$ :

Da ein veränderter Wert von  $\mu$  den Funktionsgraphen nur verschiebt, aber den Flächeninhalt nicht verändert, ist die Wahrscheinlichkeit  $P(|X - \mu| \leq \sigma)$  unabhängig vom Parameter  $\mu$ .

#### b) Unabhängigkeit von $\sigma$ :

Vergleicht man für den festen Wert  $\mu = 0$  die Graphen der Dichtefunktionen für  $\sigma = 1$  und einem beliebigen Wert für  $\sigma$ , so gilt für die Terme:

$$\varphi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$$

$$\varphi_{0,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$

Der Graph von  $\varphi_{0,\sigma}$  geht aus dem Graphen von  $\varphi_{0,1}$  hervor durch:

- ① Streckung in y-Richtung um den Faktor  $\frac{1}{\sigma}$  (vor dem Funktionsterm steht  $\frac{1}{\sigma}$ )
- ② Streckung in x-Richtung um den Faktor  $\sigma$  (x wird mit  $\frac{1}{\sigma}$  multipliziert)

Da die Fläche durch die Summe der einbeschriebenen Rechtecksflächen berechnet wird (Untersumme), sich aber die Rechtecksflächen bei diesen Streckungen nicht verändern, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit unabhängig von  $\sigma$ . Dies gilt auch für beliebige Vielfache  $k \cdot \sigma$  von  $\sigma$ .

(Ein Rechteck, dass in x-Richtung um  $\sigma$  gestreckt wird, hat die Breite  $b \cdot \sigma$ . Die Höhe des Rechtecks wurde um  $\frac{1}{\sigma}$  gestreckt, beträgt also  $\frac{1}{\sigma} \cdot h$ . Der Flächeninhalt ist damit  $A = b \cdot \sigma \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot h = h \cdot b$ )

#### Regel:

Für eine  $N_{\mu,\sigma}$ -verteilte Zufallsgröße  $X$  ist die Wahrscheinlichkeit  $P(\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma)$  unabhängig von  $\mu$  und  $\sigma$  und es gilt:

$$\text{Für } k = 1: P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,683$$

$$\text{Für } k = 2: P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,954$$

$$\text{Für } k = 3: P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,997$$

Umgekehrt: Für welches Intervall (oder welches  $k$ ) ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  um höchstens  $k \cdot \sigma$  vom Erwartungswert abweicht 90%, 95% oder 99%?

$$0,90 = P(\mu - 1,64 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1,64 \cdot \sigma) \quad (\text{also } k = 1,64)$$

$$0,95 = P(\mu - 1,96 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1,96 \cdot \sigma) \quad (\text{also } k = 1,96)$$

$$0,99 = P(\mu - 2,58 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2,58 \cdot \sigma) \quad (\text{also } k = 2,58)$$