§07 Normalverteilung

1. Gaußsche Glockenfunktion

Die Funktionen der Schar

$$\varphi_{\mu,\sigma}: x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ mit } \mathbf{x} \in \mathsf{IR} \text{ und den Parametern } \mu \, \mathit{und } \sigma$$

heißen Gauß'sche Glockenfunktionen.

Mit σ = 1 und μ = 0 ergibt sich folgende Gauß'sche Glockenfunktion:

$$\varphi: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} x \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften:

① Vorzeichen: $\varphi_{\mathsf{u},\sigma}\left(x\right) > 0$

Der Graph von $\varphi_{\mu,\sigma}$ ist achsensymmetrisch zur Gerade x = μ . ② Symmetrie:

 $\varphi_{\mu,\sigma} \colon x \longmapsto \lim_{x \to \pm \infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0$ 3 Grenzwerte:

Der Punkt H $\left(\mu \middle| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ ist einziger Hochpunkt des Graphen von $\varphi_{\mu,\sigma}$ ④ Extrempunkt:

Die beiden Wendepunkte haben die Koordinaten $\left(\mu \pm \sigma \middle| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}}\right)$ S Wendepunkte:

Die Integralfunktion $\Phi_{\mu,\sigma} x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t) dt$ hat folgende Eigenschaften: ⑥ Integralfunktion*:

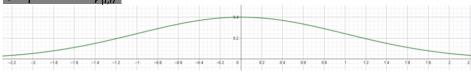
• $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = 1$

Der Graph von $\Phi_{\mu,\sigma}$ ist streng monoton zunehmend und

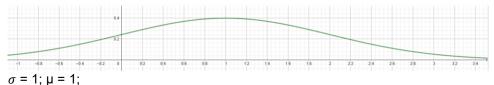
Er hat den Wendepunkt W(μ|0,5).

Zu diesem Punkt ist der Graph auch punktsymmetrisch.

Graphen von $\varphi_{u,\sigma}$:



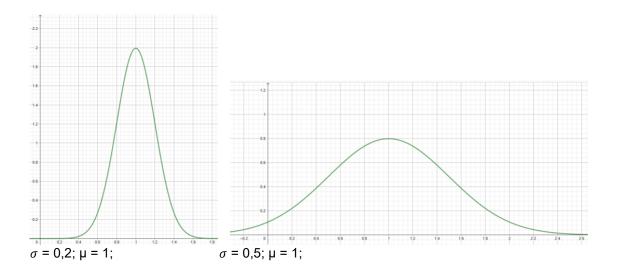
 σ = 1; μ = 0;





 σ = 2; μ = 1;

^{*} Das Integral kann nicht gelöst werden, sondern wird durch Näherungsverfahren angegeben (Taschenrechner/Tafelwerk)



2. Normalverteilung

- Eine Zufallsgröße X heißt normalverteilt (oder $N_{\mu,\sigma}$ -verteilt) mit den Parametern μ (Erwartungswert) und σ (Standardabweichung), wenn ihre Dichtefunktion eine Gauß'sche Glockenfunktion $\varphi_{u,\sigma}$ ist.
- Die Integralfunktion

$$\Phi_{\mu,\sigma}$$
: $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t) dt = P(X \le x)$

ist dabei die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X.

• Eine Zufallsgröße X heißt standardnormalverteilt, wenn dabei gilt: $\sigma = 1$ und $\mu = 0$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X Werte aus dem Intervall [r; s] annimmt, berechnet man also so:

$$P(r \le X \le s) = \int_{r}^{s} \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = \Phi_{\mu,\sigma}(s) - \Phi_{\mu,\sigma}(r),$$

wobei die Werte $\Phi_{\mu,\sigma}(s)$ und $\Phi_{\mu,\sigma}(r)$ aus der Tabelle abgelesen oder der Integralwert mit dem Taschenrechner ermittelt werden kann.

Hilfen für den Taschenrechner:

(Dabei muss man sich daran erinnern, dass stets gilt: $P(X \le \mu) = \Phi_{u,\sigma}(\mu) = 0.5$)

- Falls $a > \mu$, gilt: $P(X \le a) = P(X \le \mu) + P(\mu \le X \le a) = 0.5 + P(\mu \le X \le a)$
- Falls $a < \mu$, gilt: $P(X \le a) = P(X \le \mu) P(a \le X \le \mu) = 0.5 P(a \le X \le \mu)$
- $P(X > a) = 1 P(X \le a)$
- P(X = a) = 0
- $P(X < a) = P(X \le a)$

© H. Drothler 2025 www.drothler.net