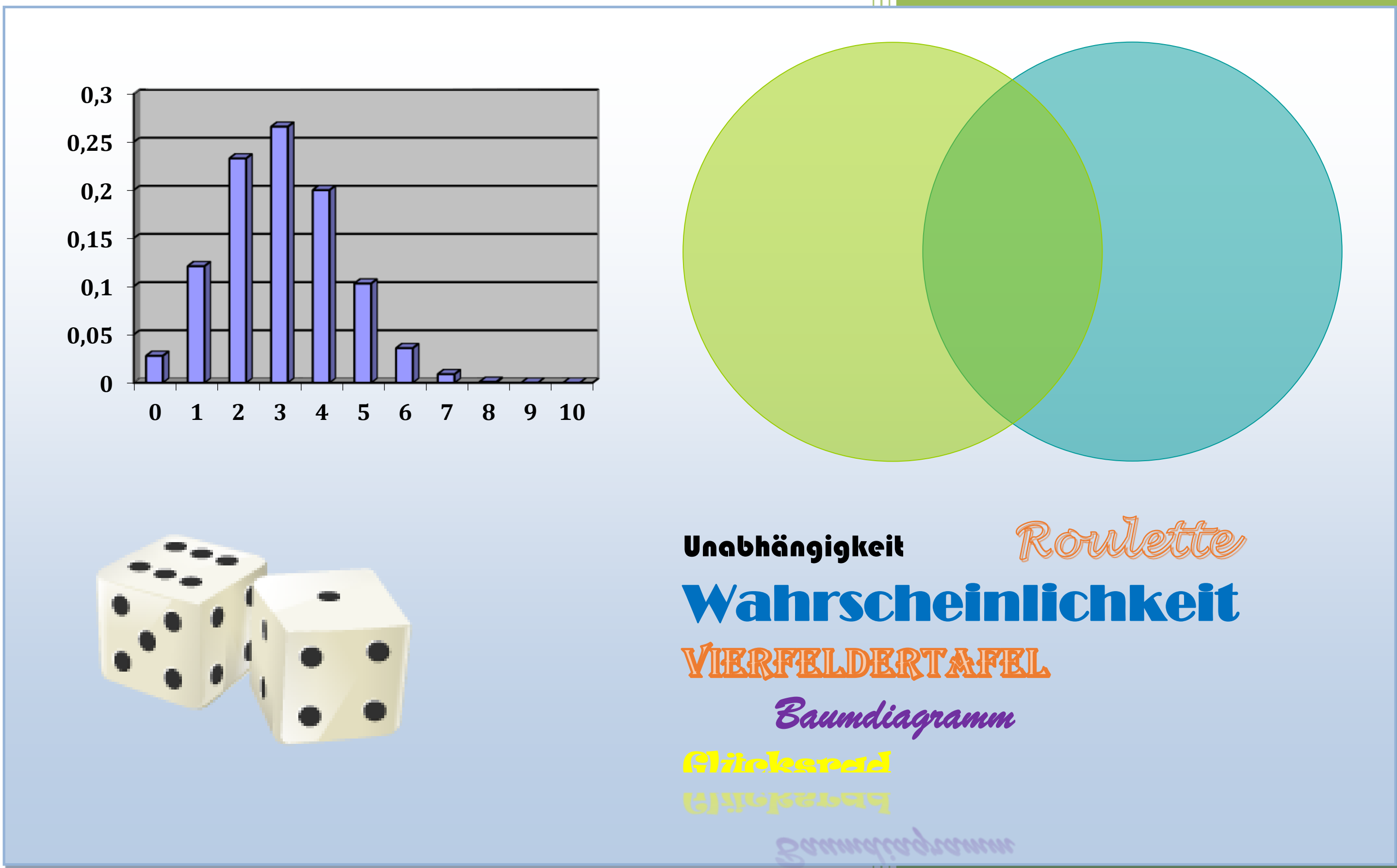
Skripten für die
Oberstufe

Wiederholung Stochastik Jgst 11



www.drothler.net

Inhalt

Grundlegende Begriffe

1. Zufallsexperiment

Ein *Zufallsexperiment* ist ein Vorgang, der
– unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist,
– dessen Ergebnis eines von mehreren Ausgängen,
– aber nicht vorhersehbar ist.

Beispiele
① Münzwurf (Ausgänge: Zahl; Kopf)
② Roulette (0; 1; 2;...;36)
③ Würfeln (Ausgänge: 1; 2; 3; 4; 5; 6)
④ Zweimaliges Würfeln (Ausgänge: (1;1); (1;2); (1;3);... (2;1);...; (6;6))

2. Ergebnis und Ereignis

Definitionen
Eine Menge $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots \omega_n\}$ heißt *Ergebnismenge* eines Zufallsexperiments, wenn jedem Versuchsausgang höchstens ein Element aus Ω zugeordnet ist.
Die Elemente $\omega_1; \omega_2; \dots \omega_n$ heißen *Ergebnisse* des Zufallsexperiments.
Die Anzahl der Elemente von Ω heißt *Mächtigkeit von Ω* und wird mit $|\Omega|$ bezeichnet.

Beispiele:

① Münzwurf:	$\Omega = \{Z; K\}$	$\lvert\Omega\rvert = 2$
② Roulette:	$\Omega = \{0; 1; 2;...;36\}$	$\lvert\Omega\rvert = 37$
③ Würfeln:	$\Omega = \{1;2; 3; 4; 5; 6\}$	$\lvert\Omega\rvert = 6$
④ Zweimaliges Würfeln:	$\Omega = \{ (1;1); (1;2); (1;3);... (2;1);...; (6;6)\}$	$\lvert\Omega\rvert = 36$

Definition
Jede Teilmenge A einer Ergebnismenge Ω heißt *Ereignis*.
Die Menge aller Ereignisse heißt *Ereignismenge* $\wp(\Omega)$.

Stellt sich ein Versuchsergebnis ein, das in A enthalten ist, so sagt man: „Das Ereignis A tritt ein."
Die Teilmenge Ω heißt auch *sicheres Ereignis* und die leere Menge $\varnothing$ heißt *unmögliches Ereignis*. Ein Ereignis $\{\omega_i\}$ mit nur einem Element heißt *Elementarereignis*.
Oft wird ein Ereignis auch durch Worte beschrieben.

Beispiele

① *Münzwurf:*

A = {K}	A: „Es fällt Kopf"	|A| = 1
B = {K; Z}	B: „Es fällt Kopf oder Zahl"	|B| = 2

② *Roulette:*

A = {1; 2;...12}	A:„Es fällt eine Zahl aus dem 1. Dutzend";	|A| = 12
B = {13}	B:„Es fällt die 13";	|B| = 1

③/④ *Würfeln:*

A = {1;3;5}	A:„Es fällt eine ungerade Zahl."	|A| = 3
B = {(1;2);(2;1)}	B:„Die Augensumme beträgt 3.";	|B| = 2
C = {(5;6);(6;5) ;(6;6)}	C:„Die Augensumme beträgt mindestens 11.";	|C| = 3

3. Wahrscheinlichkeitsmaß und –verteilung (axiomatisch)

Definition:
Eine Funktion $P: A \mapsto P(A)$ mit $A \in \wp(\Omega)$ und $P(A) \in \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn sie folgende Eigenschaften (Axiome von Kolmogorow) erfüllt:
1. Für ein beliebiges Ereignis gilt: $P(A) \geq 0$ (Nichtnegativität)
2. Für das sichere Ereignis gilt: $P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)
3. Für zwei unvereinbare Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Man nennt diese Zahl P(A) „Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A“.

Definition:
Sei $\{A_1, A_2;...A_m\}$ eine Zerlegung von Ω (d.h. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ mit unvereinbaren Ereignissen $A_1, A_2;...A_m$).
Die Funktion $P: A \mapsto P(A_i)$ mit i = 1; 2; ... ; m heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zerlegung.*

Beispiele: *Werfen eines Laplace-Würfels (idealer W.)*

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Werfen einer L-Münze:

ω	K	Z
$P(\{\omega\})$	½	½

Glücksrad

ω	G (grün)	B (blau)	R (Rot)
$P(\{\omega\})$	½	¼	¼

4. Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Definition:
Ein stochastisches Experiment heißt *Laplace-Experiment*, wenn alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Für Laplace-Experimente gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen gleichwahrscheinlichen Ergebnisse}}$$

Eigenschaften für Wahrscheinlichkeiten:

① $0 \leq P(A) \leq 1$

② a) $P(A) = \Sigma P(\{\omega\})$ $(\omega \in A)$

Damit folgt für unvereinbare Ereignisse $A_1, A_2 ,...,A_n$:

②.b) $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... P(A_n)$ $(\omega \in A)$

③ $P(\emptyset) = 0$ ④ $P(\Omega) = 1$ ⑤ $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

⑥ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

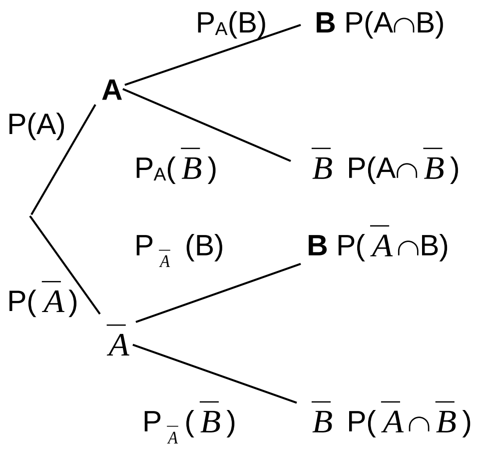
Verfahren und Berechnungen

4. Baumdiagramme und bedingte Wahrscheinlichkeit

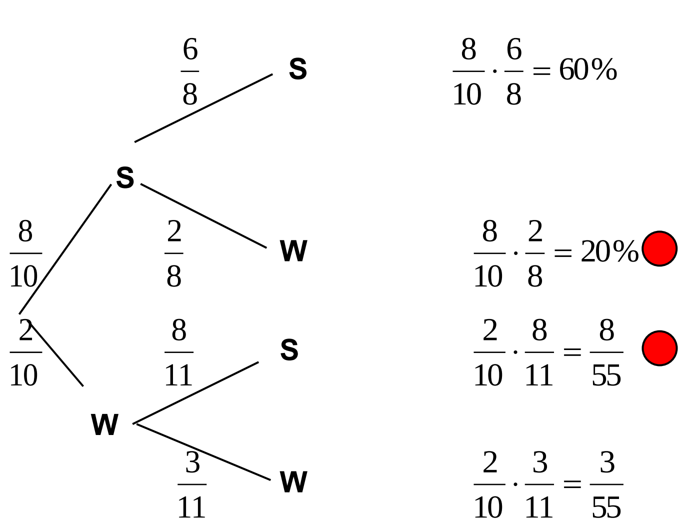
Beispiel:
In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, von denen 8 schwarz und 2 weiß sind. Wird eine schwarze Kugel gezogen, so wird diese und eine zusätzliche schwarze Kugel der Urne entnommen, wird eine weiße Kugel gezogen, so wird diese und eine zusätzliche weiße Kugel in die Urne gelegt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse beim 2maligen Ziehen.

<u>Lösung mit Baumdiagramm</u>

Allgemein



Lösung für das Beispiel



$P_A(B)$ heißt *(bedingte) Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A*

Berechnung: $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Sie sagt aus, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ereignis B eintritt, wenn zuvor A eingetreten ist.

Im Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im 2. Zug eine schwarze Kugel gezogen wird, wenn im 1. Zug bereits eine schwarze gezogen wurde.

Dabei gelten folgende Regeln:

1. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1. z.B.:
   $P(A) + P(B) = 1$ oder $P_A(B) + P_A(A) = 1$
2. Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Elementarereignis führt.
3. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich die Summe der Wahrscheinlichkeit der Pfade, die zu diesem Ereignis führen.

Beispiel: P(„Genau 1 weiße Kugel“) = $\frac{1}{5}+\frac{8}{55}=\frac{19}{55}$ (Markierte Pfade ●)

Für das Beispiel ergibt sich folgende Verteilung:

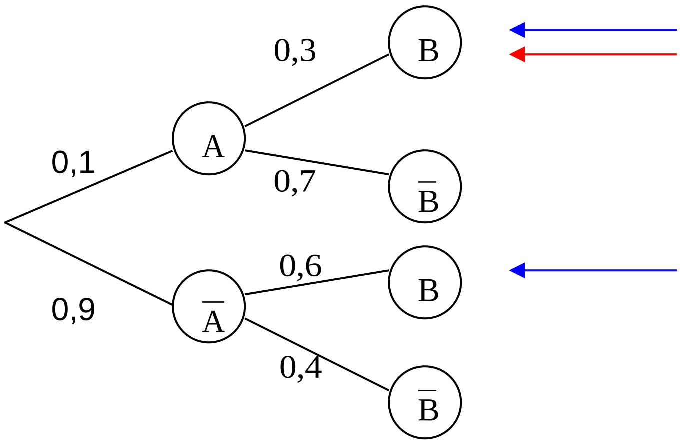
ω	(ss)	(sw)	(ws)	(ww)
P({ω})	60%	20%	$\frac{8}{55}$	$\frac{3}{55}$

Berechnungen mit der bedingten Wahrscheinlichkeit

Gegeben sind die Bedingung A mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit und die bedingten Wahrscheinlichkeiten von B unter der Bedingung A bzw. $\overline{A}$, gesucht ist die Wahrscheinlichkeit von B.

Beispiel 1:

10% der Schüler unserer Schule sind männlich. 30% der Jungen und 60% der Mädchen spielen ein Instrument. Wie viel Prozent aller Schüler spielt ein Instrument.



Lösung:

Man muss die Wahrscheinlichkeiten, die zum Ereignis B führen (blaue Pfeile), addieren.

Also: 10%·30% + 90%·60% = 0,1·0,3 + 0,9·0,6 = 0,57 = 57%

Beispiel 2:

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Instrumentspieler männlich ist?

Wir wissen: $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Also: $P_B(A)=\dfrac{10\%\cdot 30\%}{54\%}=\dfrac{0{,}1\cdot 0{,}3}{0{,}54}=5{,}56\%$

Man dividiert das Ergebnis des Pfads P(A $\cap$ B) (Roter Pfeil) durch P(B) (Summe von Wahrscheinlichkeiten – Beispiel 1, blaue Pfeile)

5. Vierfeldertafel und Unabhängigkeit

Die Eigenschaften kommen bei der *Vierfeldertafel* zur Anwendung:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Beispiel *Vierfeldertafel*
100 Studenten, unter denen sich 20 Raucher befinden, haben an einer Prüfung teilgenommen.
Folgende Ereignisse werden definiert:
R: „Der Student ist Raucher"
B: „Der Student hat die Prüfung bestanden."

Fülle für folgende Fälle eine Viefeldertafel aus:

a) 2 Raucher und 70 Nichtraucher haben die Prüfung bestanden

Vierfeldertafel:

	R	$\overline{R}$	
B	2 %	70 %	72 %
$\overline{B}$	18 %	10%	28 %
	20 %	80 %	100 %

Die Ereignisse R und B sind offenbar abhängig.
Hier gilt:

$\frac{P(B \cap R)}{P(R)} \neq \frac{P(B)}{1} \Rightarrow P(B \cap R) \neq P(B) \cdot P(R)$

$P_R(B) \neq P(B)$

b) 10 Raucher und 40 Nichtraucher haben die Prüfung bestanden

Vierfeldertafel:

	R	$\overline{R}$	
B	10 %	40 %	50 %
$\overline{B}$	10 %	40 %	50 %
	20 %	80 %	100 %

Die Ereignisse R und B sind offenbar unabhängig.

Hier gilt:

$\frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B)}{1} \Rightarrow P(B \cap R) = P(B) \cdot P(R)$

$P_R(B) = P(B)$

Definition
Zwei Ereignisse A und B heißen *stochastisch unabhängig*, wenn für sie die Produktregel $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ gilt,
anders ausgedrückt, wenn für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt: $P_A(B) = P(B)$
Andernfalls heißen die Ereignisse *stochastisch abhängig*.

Es gilt dabei auch:

A und B unabhängig $\Leftrightarrow$ A und $\overline{B}$ unabhängig $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ und B unabhängig $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig

Beispiel *Untersuchung auf Unabhängigkeit:*

Sind die Ereignisse
A: „Beim Würfeln fällt eine gerade Augenzahl" und
B: „Es fällt eine Primzahl"
stochastisch unabhängig?

Lösung:

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ A = {2;4;6} B= {2;3;5} $A \cap B = \{2\}$

P(A) = ½ P(B) = ½ P(A∩B) = $\frac{1}{6}$

P(A∩B) = $\frac{1}{6}$

P(A) P(B) = ½·½ = ¼

Also: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ A und B sind stochastisch abhängig.

Beispiel *Vierfeldertafel für unabhängige Ereignisse:*
Gegeben sind die unabhängigen Ereignisse A und B mit P(A) = 20% und P(A∩B) = 10%.
Fülle eine vollständige Vierfeldertafel aus

Lösung:

	A	$\overline{A}$	
B	*10%*	40%	*50%*
$\overline{B}$	10%	40%	50%
	20%	80%	*100%*

P(A∩B) = P(A)·P(B)

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{10\%}{20\%} = \frac{1}{2} = 50\%$$

