Für das gesamte Arbeitsblatt Erwartungswert und Varianz: Skript §02 Punkte 4. und 5.

1. Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsgröße X mit der Verteilung:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,31	0,11	0,50	0,08
$x - \mu$	–1,35	–0,35	0,65	1,65

E(X) = 0·0,31 + 1·0,11 + 2·0,50 + 3·0,08 = 1,35

Var(X) = (–1,35)²· 0,31 + (–0,35)²·0,11 + 0,65²·0,50 + 1,65²·0,08 = 1,0075

$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1,0075} = 1,0037$

2. Ein Unternehmensberater setzt für die Zufallsgröße X: „Anzahl der täglichen Systemabstürze" folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung als Planungsgrundlage an:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,67	0,25	0,05	a
$x - \mu$	–0,44	0,56	1,56	2,56

a = 1 – (0,67 + 0,25 + 0,05) = 0,03

E(X) = 0·0,67 + 1·0,25 + 2·0,05 + 3·0,03 = 0,44

Var(X) = (–0,44)²· ·0,67 + 0,56²·0,25 + 1,56²·0,05 + 2,56²·0,03 = 0,5264

3.

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,11	0,32	0,35	0,12	a	b
$x - \mu$	–1,8	–0,8	0,2	1,2	2,2	3,2

a) **Erwartungswert**

E(X) = 1,8

0·0,11 + 1·0,32 + 2·0,35 + 3·0,12 + 4a + 5b = 1,8

1,38 + 4a + 5b = 1,8

I. 5a + 4b = 0,42

Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt 1

0,11 + 0,32 + 0,35 + 0,12 + a + b = 1

0,9 + a + b = 1

II. a + b = 0,1

Lösen des GLS

I. 4a + 5b = 0,42

II. a + b = 0,1

I. – 4·II. **b = 0,02**

a in II a + 0,02 = 0,1 => **a = 0,08**

b) E(X) = 1,8

Var(X) = (–1,8)²·0,11 + (–0,8)²·0,32 + 0,2²·0,35 + 1,2²·0,12 + 2,2²·0,08 + 3,2²·0,02 = 1,34

$\sigma = \sqrt{1,34} = 1,16$

4.

x	0	50	100	200
$P(X = x)$	0,30	a	b	0,10
$x - \mu$	-60	-10	40	140

a) **Erwartungswert**

$E(X) = 60$

$0\cdot 0{,}30 + 50a + 100b + 200\cdot 0{,}10 = 60$

$50a + 100b + 20 = 60$

I. $50a + 100b = 40$

Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt 1

$0{,}30 + a + b + 0{,}10 = 1$

$0{,}4 + a + b = 1$

II. $a + b = 0{,}6$

Lösen des GLS

I. $50a + 100b = 40$

II. $a + b = 0{,}6$

I. – 50·II. $50b = 10$ => **b = 0,2**

b in II $a + 0{,}2 = 0{,}6$ => **a = 0,4**

b) $E(X) = 60$

$\mathrm{Var}(X) = (-60)^2\cdot 0{,}30 + (-10)^2\cdot 0{,}4 + 40^2\cdot 0{,}2 + 140^2\cdot 0{,}1 = 3400$

$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{3400} = 58{,}31$

5.

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$

Für die Augenzahlen 1 bis 5 wird die Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ durch 5 geteilt

$E(X) = 1\cdot\frac{2}{15} + 2\cdot\frac{2}{15} + 3\cdot\frac{2}{15} + 4\cdot\frac{2}{15} + 5\cdot\frac{2}{15} + 6\cdot\frac{1}{3} = \frac{60}{15} = 4$

6. a) Begonnen wird mit Kopf oder Zahl, also gibt es 2 Möglichkeiten im ersten Wurf, dann stets eine, also ist $|A| = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots \cdot 1 = 2$. Beim n-maligen Werfen ist $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$

$P(A) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

b) $E_2(X)$: Münze wird höchstens 2mal geworfen (Index 2). Da zweimal hintereinander die gleiche Seite oben liegen soll, muss sie auch mindestens 2mal geworfen werden. Also wird sie genau 2mal geworfen (mit Wahrscheinlichkeit 1).
$E_2(X) = 2 \cdot P(X = 2) = 2 \cdot 1 = 2$

$E_3(X)$: Münze wird höchstens 3mal geworfen (Index 3). Auch hier muss sie mindestens 2mal geworfen werden.
Es gibt also folgende Möglichkeiten für X = 2:
(K;Z) und (Z;K) mit $P(X = 2) = ½ = 0{,}50$
Damit ergibt sich $P(X = 3) = 1 – 0{,}50 = 0{,}50$
$E_3(X) = 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) = 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$

$E_4(X)$: Münze wird höchstens 4mal geworfen (Index 4). Auch hier muss sie mindestens 2mal geworfen werden.
Es gibt wieder folgende Möglichkeiten für X = 2:
(K;Z) und (Z;K) mit $P(X = 2) = ½ = 0{,}50$
Für X = 3 gibt es folgende Möglichkeiten:
(K;K; Z) und (Z;Z;K) mit $P(X = 3) = 2/8 = ¼ = 0{,}25$
Damit ergibt sich $P(X = 4) = 1 – (0{,}50 + 0{,}25) = 0{,}25$
$E_4(X) = 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 3 \cdot P(X = 4) = 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}25 = 2{,}75$