1. Aufgabe
p = 0,4

a) n = 21; P(X = 8) = $\binom{21}{8}\cdot 0{,}4^8\cdot 0{,}6^{13} = 17{,}42\%$

b) n = 12; P(X = 3) = $\binom{12}{3}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^{9} = 14{,}19\%$

c) n = 15; P(X = 6) = $\binom{15}{6}\cdot 0{,}4^6\cdot 0{,}6^{9} = 20{,}66\%$

n = 8
d) P(D) = 0,4

e) P(X = 1) = $0{,}4\cdot 0{,}6^7 = 1{,}12\ \%$

f) P(X = 3) = $0{,}4^3\cdot 0{,}6^5 = 0{,}498\ \%$

g) P(X = 4) = $\binom{8}{4}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^4 = 23{,}22\%$

h) P(X = 2) = $\binom{8}{2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^6 = 20{,}90\%$

i) P(X = 5) = $0{,}4\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^3\cdot\binom{7}{4} = \cdot\binom{7}{4}\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^3 = 7{,}74\%$

j) (hier n = 4) P(X = 2) = $\cdot\binom{4}{2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^2 = 34{,}56\%$

k) P(X = 4) = $0{,}4^3\cdot 0{,}6\cdot\binom{4}{3}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6\cdot\binom{2}{1} = \cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^4 = 2{,}65\%$

l) P(X = 3) = $0{,}4^2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^5\cdot\binom{6}{1} = \cdot\binom{6}{1}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^5 = 2{,}99\%$

m) P(X = 3) = $0{,}4\cdot 0{,}6\cdot\binom{2}{1}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^4\cdot\binom{6}{2} = \binom{2}{1}\cdot\binom{6}{2}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^5 = 14{,}93\%$

n) P(X = 3) = $0{,}4^2\cdot 0{,}6\cdot\binom{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^4\cdot\binom{5}{1} = \binom{3}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^5 = 7{,}46\%$

o) P(X≥ 1) = 1 – P(X =0) =1 – $\binom{8}{0}\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^8 = 1 - 0{,}6^8 = 98{,}32\%$

p) P(2 ≤X ≤ 3) = P(X = 2) + P(X = 3) =
$$=\binom{8}{2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^6 + \binom{8}{3}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^5 = 0{,}20902 + 0{,}27869 = 48{,}77\%$$

q) P(4 ≤ X < 6) = P(X = 4) + P(X = 5) =
$$=\binom{8}{4}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^4 + \binom{8}{5}\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^3 = 0{,}23224 + 0{,}12386 = 35{,}61\%$$

r) P(X ≤ 6) = 1 – P(X >6) = 1 – [P(X = 7) + P(X = 8) =
$$= 1 - \left[\binom{8}{7}\cdot 0{,}4^7\cdot 0{,}6^1 + \binom{8}{8}\cdot 0{,}4^8\cdot 0{,}6^0\right] = 1 - [0{,}00786432 + 0{,}00065536] = 0{,}852\%$$

s) P(S) = $0{,}6^3\cdot 0{,}4 = 8{,}64\%$
t) P(T) = $0{,}6^2\cdot 0{,}4 = 14{,}4\%$
Zusatzaufgabe t_1: Wie groß ist die W., dass der 4. Schüler der dritte Tafelputzer ist?

Zusatzaufgabe t_2: Wie groß ist die W., dass der 6. Schüler der vierte Tafelputzer ist?
Lösungen: Siehe letzte Seite

u) P(X ≥ 1) ≥ 0,99 1 – P(X=0) ≥ 0,99 P(X=0) ≤ 0,01

$\binom{n}{0} 0{,}4^0 0{,}6^n \leq 0{,}01$ $0{,}6^n \leq 0{,}01$ n□ln0,6≤ ln0,01 n ≥ 9,015

Mindestens 10Schüler müssen vorbeilaufen.

v) P(X ≥ 1) ≥ 0,999 1 – P(X=0) ≥ 0,99 P(X=0) ≤ 0,001

$\binom{n}{0} 0{,}4^0 0{,}6^n \leq 0{,}001$ $0{,}6^n \leq 0{,}001$ n□ln0,6≤ ln0,001 n ≥
13,52

Mindestens 14 Schüler müssen vorbeilaufen.

2. Aufgabe

a) p =0,05, n = 100

α) P(X=5)= $\binom{100}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{95} = 18{,}002\,\%$ (auch über Tafelwerk)

β) P(X>1) = 1 – P(X ≤ 1) $= 1 - \sum_{i=0}^{1} B(100;0{,}05;i) = 1 - 0{,}03708 = 96{,}3\%$

γ) P(2 ≤ X ≤ 4) = P(X ≤ 4) – P(X ≤ 1) =

$$\sum_{i=0}^{4} B(100;0{,}05;i) - \sum_{i=0}^{1} B(100;0{,}05;i) = 0{,}43598 - 0{,}03708 = 39{,}89\%$$

b) p = 0,05, n = 50

α) P(X = 3) = $\binom{50}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{47} = 21{,}99\%$ (auch über Tafelwerk)

β) P(X >2) = 1 – P(X ≤ 2) $= 1 - \sum_{i=0}^{2} B(50;0{,}05;i) = 1 - 0{,}54053 = 45{,}95\%$

γ) P(3< X ≤ 5) = P(X ≤ 5) – P(X ≤ 3) =

$$\sum_{i=0}^{5} B(50;0{,}05;i) - \sum_{i=0}^{3} B(50;0{,}05;i) = 0{,}96222 - 0{,}21987 = 74{,}24\%$$

c) P(X ≥ 1) ≥ 0,99 1 – P(X=0) ≥ 0,99 P(X=0) ≤ 0,01

$\binom{n}{0} 0{,}05^0 0{,}95^n \leq 0{,}01$ $0{,}95^n \leq 0{,}01$ n□ln0,95≤ ln0,01 n ≥
89,78

Mindestens 90Schuhe müssen überprüft werden.

d) P(X ≥ 1) ≥ 0,96 1 – P(X=0) ≥ 0,96 P(X=0) ≤ 0,04

$\binom{n}{0} 0{,}05^0 0{,}95^n \leq 0{,}04$ $0{,}95^n \leq 0{,}04$ n□ln0,95≤ ln0,04 n ≥
62,75

Mindestens 63Schuhe müssen überprüft werden.

e) P(X = 2) $= 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^8 \cdot \binom{9}{1} = \binom{9}{1} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^8 = 2{,}419\ \%$

f) P(X = 3) $= 0{,}4 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^{17} \cdot \binom{19}{2} = \binom{19}{2} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^{17} = 0{,}1852\ \%$

g) α) P(X = 3) $= \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \binom{4}{2} = 2{,}098\ \%$

1. Platz Fehlerhafter Schuh (3 von 13 Schuhen sind fehlerhaft)
2. Platz Fehlerhafter Schuh (noch 2 von 12 Schuhen sind fehlerhaft)
3. Platz Einwandfreier Schuh (10 von 11 Schuhen sind einwandfrei)
4. Platz EinwandfreierSchuh (9 von 10 Schuhen sind einwandfrei)
5. Platz Fehlerhafter Schuh (1 von 9 Schuhen ist fehlerhaft)

Auf den ersten 4 Plätzen können die beiden fehlerhaften Schuhe noch variieren.

β) P(X = 1) = $\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{10}{4}}{\binom{13}{5}} = 48{,}95\ \%$ (s. §05 letzte Seite)

Zähler: 1 Schuh aus den 3 fehlerhaften und 4 Schuhe aus den 10 einwandfreien
Nenner: Insgesamt 5 Schuhe aus 13 Schuhen

h) α) P(X = 6) $= \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \binom{6}{5} = 0{,}333\ \%$

1. Platz Fehlerhafter Schuh (6 von 14 Schuhen sind fehlerhaft)
2. Platz Fehlerhafter Schuh (noch 5 von 13 Schuhen sind fehlerhaft)

….

6. Platz Einwandfreier Schuh (7 von noch 9 Schuhen sind einwandfrei)
7. Platz Fehlerhafter Schuh (1 von 8 Schuhen ist fehlerhaft)

Auf den ersten 6 Plätzen können die fünf fehlerhaften Schuhe noch variieren.

β) P(X ≥ 1) =1 – P(X = 0) = 1 – $\frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{8}{6}}{\binom{14}{6}} = 0{,}932\ \%$

Zähler: 1 Schuh aus den 3 fehlerhaften und 4 Schuhe aus den 10 einwandfreien
Nenner: Insgesamt 5 Schuhe aus 13 Schuhen

3. Aufgabe

a) P(X≥ 10) = P(X = 10) +P(X = 11) +P(X = 12) =

$= \binom{12}{10} \cdot 0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^2 + \binom{12}{11} \cdot 0{,}8^{11} \cdot 0{,}2^1 + \binom{12}{12} \cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}2^0 = 55{,}83\%$

b) P(X = 10) = $0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^2 \cdot 3 = 1{,}288\%$

3 Möglichkeiten, 10 aufeinanderfolgende Treffer auf 12 Plätzen

c) P(X = 8) $= 0{,}8^2 \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^7 \cdot \binom{13}{6} = \binom{13}{6} \cdot \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^7 = 0{,}369\ \%$

d) P(X ≥ 1) ≥ 0,99 1 – P(X=0) ≥ 0,99 P(X=0) ≤ 0,01

$\binom{n}{0} 0{,}8^0 0{,}2^n \leq 0{,}01$ $\quad$ $0{,}2^n \leq 0{,}01$ $\quad$ n□ln0,2≤ ln0,01 $\quad n \geq 2{,}86$

Er muss mindestens 3 mal schießen.

4. Aufgabe

a) P(p) = P(X = 2) = $\binom{8}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^6 \cdot (1-p)^2 = \binom{8}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8 = 28 p^2 \cdot (1-p)^8$

Auf den ersten acht Plätzen müssen 2 rote Gummibärchen und 6 nicht-rote Gummibärchen sein. Die beiden roten können auf den acht Plätzen noch variieren. Die letzten beiden Plätze müssen nicht-rote Gummibärchen sein.

b) $P(p) = 28\, p^2 \cdot (1-p)^8$
P(p) wird maximal, wenn die Ableitung P‘(p) Null ist und einen VZW von + nach – hat.
$P'(p) = 28 \cdot 2p \cdot (1-p)^8 + 28p^2 \cdot 8(1-p)^7 \cdot (-1) \quad = \quad 28 \cdot 2p \cdot (1-p)^7 \cdot [(1-p) - p \cdot 4] = 56p \cdot (1-p)^7 \cdot (1-5p)$
Produktregel | (1–p) nachdiffer. $\quad$ $28 \cdot 2p \cdot (1-p)^7$ ausklammern
$P'(p) = 0 \quad \Rightarrow (p_1 = 0 \quad p_2 = 1$ $\quad$ beide Werte unmöglich, da Ereignis „genau 2 rote“ nicht möglich wäre)
$1 - 5p = 0$
$p = 0{,}2$
VZW von P‘(p) von + nach – an der Stelle p = 0,2 => Maximale Wahrscheinlichkeit

c) $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$

$1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$

$P(X = 0) \leq 0{,}1$

$\binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} \leq 0{,}1$

$(1-p)^{10} \leq 0{,}1$

$1 - p \leq \sqrt[10]{0{,}1}$

$-p \leq \sqrt[10]{0{,}1} - 1 \quad | \cdot(-1)$

$p \geq -\sqrt[10]{0{,}1} + 1 \quad \approx \quad 20{,}567\,\%$

d) $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$

$1 - P(X = 0) \geq 0{,}95$

$P(X = 0) \leq 0{,}05$

$\binom{6}{0} p^0 (1-p)^6 \leq 0{,}05$

$(1-p)^6 \leq 0{,}05$

$1 - p \leq \sqrt[6]{0{,}1}$

$-p \leq \sqrt[6]{0{,}1} - 1 \quad | \cdot(-1)$

$p \geq -\sqrt[6]{0{,}1} + 1 \quad \approx \quad 31{,}871\,\%$

e) P(X ≥ 1) ≥ 0,999

1 – P(X = 0) ≥ 0,999

P(X = 0) ≤ 0,001

$\binom{n}{0} 0{,}2^0 0{,}8^n \leq 0{,}001$

$0{,}8^n \leq 0{,}001$

n□ln0,8≤ ln0,001

n ≥ 30,9566 Mindestens 31 Gummibärchen müssen gezogen werden.

f) P(p) = P(X = 1) + P(X = 2) = $\binom{4}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^3 + \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 =$

$= 4 \cdot p^1 \cdot (1-p)^3 + 6 \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 = 2p(1-p)^2 \cdot [2(1-p) + 3p] = 2p \cdot (1-p)^2 \cdot (2+p)$

$P'(p) = 2 \cdot (1-p)^2 \cdot (2+p) + 2p \cdot 2(1-p)(-1) \cdot (2+p) + 2p \cdot (1-p)^2 \cdot 1 =$
$= 2 \cdot (1-p)^2 \cdot (2+p) - 4p\,(1-p) \cdot (2+p) + 2p \cdot (1-p)^2 =$
$= 2(1-p)\,[(1-p)(2+p) - 2p(2+p) + 2p(1-p)] =$
$= 2(1-p)\,[(2+p-2p-p^2) - (4p+2p^2) + (2p-2p^2)] =$
$= 2(1-p)\,[2-p-p^2 - 4p - 2p^2 + 2p - 2p^2] =$
$= 2(1-p)\,[2-3p-5p^2] = 2(1-p)\,[-5p^2-3p+2]$

$P'(p) = 0 \quad p_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{9+40}}{-10} = \frac{+3 \pm 7}{-10}$

$p_1 = -1$ (keine Wahrscheinlichkeit)

$p_2 = +0{,}4$ (VZW von P'(p) von + nach – bei p = 0,4 (2. Nullstelle der nach unten geöffneten Parabel in de eckigen Klammer) => Maximum)

Lösung Zusatzaufgaben:

Zusatzaufgabe t_1: $P(T_1) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 11{,}52\%$

Auf den ersten drei Plätzen müssen 2 Tafelputzer und ein Nicht-Tafelputzer sein. Die beiden können auf den drei Plätzen noch variieren. Der 4. Platz muss ein Tafelputzer sein.

Zusatzaufgabe t_2: $P(T_2) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 23{,}04\%$